Leipziger SchülerGesellschaft für Mathematik
http://www.lsgm.de

Korrespondenzzirkel Klasse 8. Schuljahr 2024/25

Serie 5

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 700 als Summe zweier natürlicher Zahlen darzustellen, so dass die eine Zahl bei Division durch 17 den Rest 3, die andere Zahl bei Division durch 23 den Rest 21 lässt.

Hinweis: Führe die Aufgabe auf eine lineare diophantische Gleichung zurück, löse diese und extrahiere aus der Lösung die Antwort auf die gestellte Frage nach Lösungen im Bereich der *natürlichen* Zahlen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC mögen sich die Höhen $\overline{AH_a}$ und $\overline{BH_b}$ im Punkt H schneiden.

a) Beweise, dass die Dreiecke AHH_b und BHH_a stets ähnlich sind.
b) Beweise, dass stets $|AH| \cdot |HH_a| = |BH| \cdot |HH_b|$ gilt.

Hinweise: Formuliere die Beweise in Form eines Beweisschemas.

Beachte die Sätze Z5 und S6 im Abschnitt VII (Ähnlichkeit – Strahlensätze) im Arbeitsmaterial „Sätze".

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C und dem Höhenfußpunkt H gelte $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ und $|CH| = h$. Der Umfang des Dreiecks werde mit u bezeichnet. Löse folgende Bestimmungsaufgaben:

a) Gegeben: a, b; gesucht: h.
b) Gegeben: c, u; gesucht: h.
c) Gegeben: h, u; gesucht: c.

Hinweis: Überlege dazu, welche Sätze für rechtwinklige Dreiecke in welchen Teildreiecken in den einzelnen Aufgaben angewendet werden können.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b gilt:

Wenn $0 < a < b$ gilt, dann ist $a + \sqrt{b^2 + 1} < b + \sqrt{a^2 + 1}$.

Hinweise: Formuliere den Beweis in Form eines Beweisschemas.

Forme in der Analysephase die zu beweisende Ungleichung so lange um, bis du eine wahre Aussage gefunden hast. Überlege dann, ob sich die Schritte deiner Ableitung umkehren lassen, denn im Beweis ist von einer wahren Aussage auszugehen, und aus dieser Schritt für Schritt die Behauptung herzuleiten, wie dies auch im Arbeitsmaterial „Regeln“ im Punkt (2.2.1) ausgeführt ist.

Beachte, dass viele Umformungen von Ungleichungen nur korrekt sind, wenn bekannt ist, dass beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind. Begründe in deinen Beweisschritten, warum diese Voraussetzung jeweils erfüllt ist.

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

a) Zerlege so weit wie möglich in Faktoren:

$A_1 = 6u^4 - 6,$
$A_2 = 12x^3y - 27xy^3,$
$A_3 = 20a^3b - 60a^2b^2 + 45ab^3,$
$A_4 = 7x^5 + 14x^3 + 7x.$

b) Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Gleichung im Bereich der rationalen Zahlen:

$$\frac{3}{x^2 + 2x} - \frac{4}{2x^2 - 8} = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}.$$

Hinweis: Finde gemeinsame Faktoren. Untersuche insbesondere, ob eine der binomischen Formeln zum Zusammenfassen angewendet werden kann. So kann zum Beispiel der Ausdruck $a^2 + 2a + 1$ zu $(a + 1)^2$ zusammengefasst werden, da nach der binomischen Formel $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ist.

Eure Lösungen schickt bitte **bis zum 30. Januar 2025** entweder per Post an

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

oder als pdf-Datei an `hgg@hg-graebe.de`.

Die Arbeitsmaterialien (und auch die Aufgaben) sind auf der Webseite

`https://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Zirkel.25.8-K`

zu finden.

Ich wünsche viel Spaß bei der Arbeit an den Aufgaben der fünften Serie!

Hans-Gert Gräbe