



Korrespondenzzirkel Klasse 8. Schuljahr 2024/25

Serie 4

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Ermittle alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y , die folgende Gleichungen erfüllen:

- a) $29x + 27y = 56$,
- b) $121x - 77y = 57$,
- c) $29x - 79y = 43$.

Hinweis: Lies dazu im „Arbeitsmaterial für Klasse 8“ den Abschnitt 3.2 über *Lineare diophantische Gleichungen* sowie das zusätzliche Arbeitsblatt durch und wende die dort vorgestellten Methoden auf die Aufgabenstellungen an.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Ein Zahlentripel (x, y, z) heißt *pythagoreisches Grundtripel* genau dann, wenn $x^2 + y^2 = z^2$ gilt und x, y, z teilerfremde natürliche Zahlen sind.

Beweise indirekt, dass für jedes pythagoreische Grundtripel folgende Sätze gelten:

- a) Ein Primfaktor p kann niemals in mehr als einer der drei Zahlen x, y, z vorkommen.
- b) z ist stets ungerade, und von den beiden Zahlen x und y ist stets eine gerade und eine ungerade.

Hinweis: Beachte, welche Reste eine Quadratzahl bei Division durch 4 lassen kann.

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Ein Tetraeder $ABCD$ habe die Kantenlängen $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm, $|AD| = 13$ cm, $|BD| = 13$ cm, und das Lot von D auf die durch das Dreieck ABC festgelegte Ebene sei 12 cm lang.

Beweise, dass durch diese Angaben die Länge der Kante \overline{CD} eindeutig bestimmt ist und ermittle diese Kantenlänge.

Hinweis: Sieh dir dazu den Abschnitt 2.1 *Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie* im „Arbeitsmaterial für Klasse 8“ an und überlege, welche Sätze über rechtwinklige Dreiecke du in verschiedenen ebenen Teilfiguren anwenden kannst.

Ein Tetraeder ist eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

An einem Montag trafen sich 12 Spieler zum Volleyball: Herr E, 4 Schülerinnen und 7 Schüler. Es sollen Mannschaften zu je 6 Spielern gebildet werden.

- Wie viele verschiedene Sechserteams lassen sich aus den 12 Spielern bilden?
- Spieler S und Spielerin A möchten gern immer gemeinsam in einer Mannschaft spielen. Wie viele verschiedene Sechserteams lassen sich bilden, in denen Spieler S und Spielerin A mitspielen?
- Ein Sechserteam wurde zusammengestellt und möchte jetzt ein Jahr lang jeden Montag (ohne Ausnahme) in dieser Besetzung zusammen spielen. Jedes Spiel hat höchstens fünf Sätze und bei jedem Satz darf eine andere Startaufstellung gewählt werden, d.h. es können die sechs Positionen eines Volleyballfeldes anders belegt werden. Ist es möglich, während eines Jahres jede mögliche Startaufstellung zu realisieren?

Hinweis: In dieser Aufgabe geht es erstmals um kombinatorische Grundaufgaben, die im sächsischen Lehrplan Mathematik nur noch am Rande vorkommen. Lies dir dazu das Arbeitsblatt „Kombinatorik“ durch. Weitere Links zu Texten über die kombinatorischen Grundaufgaben findest du auf unserer Webseite.

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Untersuche, ob es jeweils einen Wert für den Parameter p gibt, für den die Gleichung

$$(px - 2)^2 + (x + 3p)^2 - (px - 3)(px + 3) = 2x + (x + 2p)(x - 2p) + 26$$

im Bereich der rationalen Zahlen folgende Lösungsmenge hat:

- a) $L = \mathbb{Q}$, b) $L = \{\}$, c) $L = \{0\}$, d) $L = \{1\}$, e) $L = \{q\}$.

Dabei bezeichne \mathbb{Q} die Menge der rationalen Zahlen und q eine beliebige rationale Zahl.

Hinweis: Überlege, wie die Gleichung vereinfacht werden kann und welche Vereinfachungsschritte für welche p nicht ausgeführt werden können. Beachte im Aufgabenteil e) den Unterschied zwischen p und q .

Eure Lösungen schickt bitte **bis zum 20. Dezember 2024** entweder per Post an

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

oder als pdf-Datei an hgg@hg-graebe.de.

Die Arbeitsmaterialien (und auch die Aufgaben) sind auf der Webseite

<https://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Zirkel.25.8-K>

zu finden.

Das **zweite Arbeitstreffen** findet am **11.01.2025** 10–12 Uhr statt. Wir treffen uns um 9:30 Uhr im Innenhof des Campus Augustusplatz der Uni Leipzig am Leibnizdenkmal und gehen dann gemeinsam in den Seminarraum.

Bitte teile mir vorab mit (gern auch per E-Mail), ob du am Arbeitstreffen teilnehmen wirst.

Ich wünsche viel Spaß bei der Arbeit an den Aufgaben der vierten Serie und eine besinnliche Vorweihnachtszeit!

Hans-Gert Gräbe