Leipziger SchülerGesellschaft für Mathematik
http://www.lsgm.de

Korrespondenzzirkel Klasse 8. Schuljahr 2024/25

Serie 3

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Grundfläche $ABCD$ und der Kantenlänge a. Sei P der Diagonalenschnittpunkt der Seitenfläche $BCGF$ und sei Q der Diagonalenschnittpunkt der Deckfläche $EFGH$.

a) Ermittle den Umfang des Dreiecks APQ in Abhängigkeit von a.
b) Beweise, dass dann stets $|\angle PBQ| = |\angle BQP|$ gilt.
Stelle den Beweis in Form eines Beweisschemas[1] dar.

Hinweis: Finde ebene Schnitte des Würfels, die bekannte und gesuchte Stücke enthalten, und wende dort Sätze der ebenen Geometrie an. Lies zusätzlich den Abschnitt 2.1. *Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie* im „Arbeitsmaterial für Klasse 8“. Hilfreich sind auch die *Regeln zum Lösen geometrischer Beweisaufgaben* in „Regeln“ und der Abschnitt *IVe: Rechtwinklige Dreiecke* in „Planimetrische Sätze“.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Für vorgegebene Streckenlägen b und c sind alle Dreiecke ABC zu konstruieren, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $|AC| = b$;
(b) $|AB| = c$;
(c) $|\angle ACB| = 3 \cdot |\angle CBA|$.

Außer der Konstruktionsbeschreibung sind auch Einzigkeitsnachweis, Existenznachweis und Determination gefordert.

Hinweis: Eine geeignete Hilfslinie durch C, die den Winkel der Größe 3β in $2\beta + \beta$ teilt, führt zur Lösung, die dann noch entsprechend den Vorgaben genau aufgeschrieben werden muss.

Wiederhole im „Arbeitsmaterial für Klasse 7“ den Abschnitt 2.1. *Konstruktionsaufgaben*, dort insbesondere die Erläuterungen der Begriffe „Einzigkeitsnachweis“, „Existenznachweis“ und „Determination“. Berücksichtige weiter die Ausführungen im Abschnitt *Regeln zum Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben* in „Regeln“.

[1] Ein Beweisschema ist ein Schema, das von bekannten Aussagen zur Behauptung führt und in dem alle Beweisschritte in ihrer logischen Abfolge aufgeführt und begründet sind. Siehe dazu etwa das Beispiel eines geometrischen Beweisschemas im Abschnitt 1.4 des „Arbeitsmaterials für Klasse 7“.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Beweise mit Hilfe des Dirichletschen Schubfachprinzips, dass man unter 99 beliebigen aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen stets eine solche Zahl finden kann, deren Quersumme durch 14 teilbar ist.

Gilt die Aussage auch noch für 98 aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen?

Hinweis: Wiederhole im „Arbeitsmaterial für Klasse 8“ den Abschnitt 1.1. *Das Dirichletsche Schubfachprinzip.*

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Beweise folgenden Satz:

> Für jede natürliche Zahl n ist die Zahl $z = 57^{2n} - 35^{2n}$ durch 2024 teilbar.

Stelle den Beweis in Form eines Beweisschemas dar.

Hinweis: Wende geeignete Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen an. Siehe dazu auch den Abschnitt 3.3. *Das Rechnen mit Kongruenzen* im „Arbeitsmaterial für Klasse 7“.

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen über dem Bereich der rationalen Zahlen:

a) $$\frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{x^2}$$

b) $$\frac{8x+1}{5} + \frac{2x-7}{20} - \frac{5x-7}{8} < 6x - \frac{73}{8}$$

Hinweis: Forme äquivalent um und beachte den jeweiligen Grundbereich, über dem die Terme definiert sind.

Eure Lösungen schickt bitte **bis zum 20. November 2024** entweder per Post an

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

oder als pdf-Datei an `hgg@hg-graebe.de`.

Die Arbeitsmaterialien (und auch die Aufgaben) sind auf der Webseite

`https://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Zirkel.25.8-K`

zu finden.

Ich wünsche viel Spaß bei der Arbeit an den Aufgaben der dritten Serie!

Hans-Gert Gräbe