



Korrespondenzzirkel Klasse 8. Schuljahr 2024/25

Serie 2

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Ermittle die Lösungsmengen der folgenden linearen Kongruenzen:

- | | | | |
|----|----------------------------|----|--------------------------------|
| a) | $18x \equiv 90 \pmod{42}$ | b) | $307x \equiv 21 \pmod{13}$ |
| c) | $85x \equiv 9 \pmod{15}$ | d) | $1474x \equiv 5226 \pmod{670}$ |
| e) | $81x \equiv 162 \pmod{13}$ | f) | $77x \equiv 308 \pmod{99}$ |

Hinweis: Mit dieser Aufgabe wird das Thema *Lineare Kongruenzen* neu eingeführt. Lies dazu zunächst im „Arbeitsmaterial Klasse 8“ den entsprechenden Abschnitt 3.1. sowie das Arbeitsblatt *Lineare diophantische Gleichungen*. Wiederhole im „Arbeitsmaterial Klasse 7“ den Abschnitt 3.3. *Das Rechnen mit Kongruenzen*.

Untersuche für jede der sechs Aufgaben deren Lösbarkeit, bestimme die zugehörige gekürzte Kongruenz und löse diese. Wir kommen auf das Thema im ersten Arbeitstreffen zurück.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Ermittle den Wahrheitswert folgender Aussagen und beweise bzw. widerlege diese Aussagen. Ist eine der Aussagen wahr, dann beweise sie indirekt.

- Wenn $(a^2 + b^2)$ durch 5 teilbar ist, dann ist sowohl a als auch b durch 5 teilbar.
- Wenn $(a^2 + b^2)$ durch 7 teilbar ist, dann ist sowohl a als auch b durch 7 teilbar.

Dabei seien a und b natürliche Zahlen.

Hinweis: Untersuche in beiden Fällen, welche Reste Quadratzahlen lassen können.

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Gleichung, wobei p ein reeller Parameter ist:

$$\sqrt{3px + 7} - \sqrt{5x - 3} = 0.$$

Hinweis: Lies dazu im „Arbeitsmaterial Klasse 8“ den Abschnitt 4.3. *Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen* bis „Auftrag“. Finde durch geeignete Umformungen Lösungskandidaten und überprüfe, für welche p welche Lösungskandidaten wirklich Lösungen sind.

Löse die Aufgabe zunächst für $p = 2$ und für $p = -2$.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Bei einem Spiel zahlt die Bank beim Gewinn stets ein (festes) ganzzahliges Vielfaches des Einsatzes aus.

Ein Spieler setzt bei diesem Spiel erst 1 € und verliert, dann 2 €, 3 € und so weiter, jedes Mal einen Euro mehr, bis er erstmalig gewinnt.

- a) Beim wievielten Spiel erhält der Spieler im Falle eines Gewinns sein ganzes Geld zurück, wenn die Bank den zehnfachen Einsatz auszahlt?
- b) Die Bank zahlt nun den k -fachen Satz ($k \in \mathbb{N}$) zurück. Beim wievielten Spiel erhält der Spieler jetzt sein ganzes Geld zurück?
- c) Der Spieler behauptet, dass er beim 12. Spiel seinen ganzen Einsatz zurückbekommen habe. Kann diese Behauptung stimmen?

Hinweis: Finde eine allgemeine Formel für den Zusammenhang zwischen der Summe der Einsätze und dem von der Bank gezahlten Gewinn.

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit 250 km/h zu einer Stadt B. Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit 200 km/h nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.

Ermittle die Länge des Weges von A nach B.

Hinweis: Extrahiere aus dem physikalischen Zusammenhang in dieser Textaufgabe ein geeignetes System von Gleichungen und löse dieses.

Eure Lösungen schickt bitte **bis zum 20. Oktober 2024** entweder per Post an

Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

oder als pdf-Datei an hgg@hg-graebe.de. Ich bemühe mich, die Lösungen bis zum Arbeitstreffen durchzusehen und die schwierigen Stellen gezielt zu besprechen.

Die Arbeitsmaterialien (und auch die Aufgaben) sind auf der Webseite

<https://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Zirkel.25.8-K>

zu finden.

Zur Erinnerung: Das **erste Arbeitstreffen** findet am **26.10.2024** 10–12 Uhr statt. Schwerpunkte des Treffens sind die Themen

- *Lineare Kongruenzen*,
- *Gleichungen und Ungleichungen* (auch mit Parametern)
- sowie das *Schubfachprinzip*.

Wir treffen uns um 9:30 Uhr im Innenhof des Campus Augustusplatz der Uni Leipzig am Leibnizdenkmal und gehen dann gemeinsam in den Seminarraum P-801 im Paulinum.

Soweit noch nicht geschehen, teile mir vorab bitte mit (gern auch per E-Mail), ob du am Arbeitstreffen teilnehmen wirst.

Ich wünsche viel Spaß bei der Arbeit an den Aufgaben der zweiten Serie!

Hans-Gert Gräbe