K O R R E S P O N D E N Z Z I R K E L   M A T H E M A T I K

A u f g a b e n   Klasse 7   2024/25   Serie 6

Aufgabe 1 (56. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe)

Über den Ausgang eines Wettkampfes mit sechs Teilnehmern, die alle verschiedene Platzierungen erreichten, wurden folgenden Aussagen gemacht:

(1) Adrian wurde nicht Zweiter oder Ben wurde Erster
(2) Adrian wurde Zweiter und Cedric wurde Vierter
(3) Adrian wurde Zweiter und Ben wurde Dritter
(4) Cedric wurde Vierter oder Ben wurde Fünfter

Entscheide und begründe, ob es möglich ist, dass …

a) … alle vier Aussagen (1) bis (4) wahr sind.
b) … genau drei dieser Aussagen wahr sind.
c) … genau zwei dieser Aussagen wahr sind.
d) … genau eine dieser Aussagen wahr ist.
e) … keine dieser Aussagen wahr ist. (5 Punkte)

[Hinweis: Eine Aussage der Form „A oder B" ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Teilaussagen A und B wahr ist. Das heißt, dass die Aussage „A oder B" auch dann wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr sind.]

Aufgabe 2

Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen im Bereich der rationalen Zahlen.

a) $\frac{x+2}{84} - \frac{x+1}{207} = \frac{2 \cdot x+7}{322}$ (3 Punkte)

b) $(5 \cdot x - 7) \cdot (5 \cdot x + 7) - (4 \cdot x - 5)^2 = (3 \cdot x - 8) \cdot (3 \cdot x + 8)$ (3 Punkte)

[Lies dazu im „Arbeitsmaterial" die Abschnitte 4.1. (Einige Begriffe) und 4.2. (Regeln für das äquivalente Umformen) sowie den ersten Teil des Abschnitts 4.3. (Einige wichtige Gleichungen).]

Aufgabe 3

Ein Bauer hinterlässt seinen beiden Söhnen eine Schafherde. Die Anzahl der Schafe ist eine zweistellige natürliche Zahl. Die Brüder lassen diese Herde von einem Mittelsmann verkaufen, wobei sie ihn beauftragen, er solle ein Schaf für soviel Euro verkaufen, wie die Herde Schafe hat. Der Mittelsmann bringt den Erlös in lauter 10 € - Scheinen und einem Rest an Kleingeld, der keinen vollen 10 € - Schein mehr ergibt.

Die Brüder teilen das Geld zunächst so, dass beide gleich viele 10 € - Scheine erhalten. Dabei bleiben ein 10 € - Schein und der Kleingeldrest übrig.
Da sagte der ältere zum jüngeren Bruder: „Ich nehme den Schein und du bekommst den Rest und ein von mir gekauftes Taschenmesser; dann haben wir beide gleich viel bekommen."

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben der Preis des Taschenmessers eindeutig ermitteln lässt. Ist dies der Fall, dann gib diesen Preis an. (6 Punkte)

Aufgabe 4 (57. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe)
Wir betrachten ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 6 cm. Ein Punkt P liegt derart auf der Diagonalen $\overline{AC}$, dass der Flächeninhalt des Vierecks BCDP ein Drittel des Flächeninhalts des Quadrates ABCD ist.
Ermittle die Abstände des Punktes P von der Geraden AB und BC. (7 Punkte)

[Hinweis: Alle gesuchten Lösungen sind mit geometrischen Argumenten exakt zu bestimmen. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind dafür nicht zulässig, da diese niemals exakt sind.]

Aufgabe 5
Beweise folgende Sätze:

a) Es gilt für alle positiven, rationalen Zahlen a und b: $\sqrt{a \cdot b} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (3 Punkte)

b) Es gilt für alle positiven, rationalen Zahlen a und b: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ (3 Punkte)

[Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 4.3. (Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen) sowie in „Regeln“ auf Seite 14 die Regeln (1) und (2.2.1).]

Mathematischer Hintergrund zu Aufgabe 5:
In dieser Aufgabe geht es um die sogenannten „Mittelungleichungen“.

- Das arithmetische Mittel für n positive rationale Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ lautet:
$$AM = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$
- Das geometrische Mittel für n positive rationale Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ lautet:
$$GM = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$$
- Das harmonische Mittel für n positive rationale Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ lautet:
$$HM = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Gilt n = 2, so ist also für die beiden positiven rationalen Zahlen a und b:

- Das arithmetische Mittel: $AM = \frac{a+b}{2}$
- Das geometrische Mittel: $GM = \sqrt[2]{a \cdot b} = \sqrt{a \cdot b}$
- Das harmonische Mittel: $HM = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

In Teilaufgabe a) hast du also gezeigt, dass das geometrische Mittel zweier positiver rationaler Zahlen stets größer oder gleich dem harmonischen Mittel dieser Zahlen ist. In Teilaufgabe b) hast du bewiesen, dass das arithmetische Mittel zweier positiver rationaler Zahlen stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen ist.

Bemerkung: Die Ungleichung AM ≥ GM ≥ HM gilt für beliebig viele positive rationale Zahlen.

Erinnerung
Das dritte Präsenztreffen findet am Samstag, den 12.04.2025, von zehn bis zwölf Uhr statt. Wir treffen uns 9:50 Uhr vor den Fahrstühlen im Eingangsbereich des Neuen Augusteums (Universitätsstraße 3; 04109 Leipzig; direkt neben dem Paulinum), um dann gemeinsam zum Seminarraum zu gehen.
Das vierte Präsentreffen wird am Samstag, den 24.05.2025, ebenfalls von zehn bis zwölf Uhr stattfinden.

Bemerkungen

Ihr erhaltet nun auch Beispiellösungen für die fünfte Aufgabenserie. Damit könnt ihr eure eigenen Lösungen vergleichen oder Inspirationen für die folgenden Aufgabenserien sammeln. Die Beispiellösungen dienen nur als Orientierung. Es gibt also auch andere Lösungsmöglichkeiten, die richtig wären und nicht dargestellt sind. Wenn ihr eine andere Idee hattet, die nicht in den Beispiellösungen ist, heißt es nicht, dass diese falsch war.
Zudem solltet ihr bereits die Korrektur der fünften Aufgabenserie (falls ihr diese abgegeben habt) erhalten haben. Wenn ihr die fünfte Serie an mich gesendet und noch keine Rückmeldung erhalten habt, meldet euch gern bei mir.

Ich wünsche dir viel Freude und Erfolg bei der Arbeit!

Letzter Einsendetermin: Freitag, der 09.05.2025

Die Lösungen bitte senden an: Franziska Wolf, Rilkestraße 98, 04416 Markkleeberg
oder: franziska.wolf03@gmail.com

Bei Fragen gern per E-Mail an mich wenden: franziska.wolf03@gmail.com