

KORRESPONDENZKREIS MATHEMATIK

Aufgaben

Klasse 7

2023/24

Serie 6

Aufgabe 1 (56. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe)

Über den Ausgang eines Wettkampfes mit sechs Teilnehmern, die alle verschiedene Platzierungen erreichten, wurden folgenden Aussagen gemacht:

- (1) Adrian wurde nicht Zweiter oder Ben wurde Erster
- (2) Adrian wurde Zweiter und Cedric wurde Vierter
- (3) Adrian wurde Zweiter und Ben wurde Dritter
- (4) Cedric wurde Vierter oder Ben wurde Fünfter

Entscheide und begründe, ob es möglich ist, dass ...

- a) ... alle vier Aussagen (1) bis (4) wahr sind.
- b) ... genau drei dieser Aussagen wahr sind.
- c) ... genau zwei dieser Aussagen wahr sind.
- d) ... genau eine dieser Aussagen wahr ist.
- e) ... keine dieser Aussagen wahr ist. (5 Punkte)

[Hinweis: Eine Aussage der Form „A oder B“ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Teilaussagen A und B wahr ist. Das heißt, dass die Aussage „A oder B“ auch dann wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr sind.]

Aufgabe 2

Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen im Bereich der rationalen Zahlen.

a) $\frac{x+2}{84} - \frac{x+1}{207} = \frac{2x+7}{322}$ (3 Punkte)

b) $(5x-7)(5x+7) - (4x-5)^2 = (3x-8)(3x+8)$ (3 Punkte)

[Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ die Abschnitte 4.1. (Einige Begriffe) und 4.2. (Regeln für das äquivalente Umformen) sowie den ersten Teil des Abschnitts 4.3. (Einige wichtige Gleichungen).]

Aufgabe 3

Ein Bauer hinterlässt seinen beiden Söhnen eine Schafherde. Die Anzahl der Schafe ist eine zweistellige natürliche Zahl. Die Brüder lassen diese Herde von einem Mittelsmann verkaufen, wobei sie ihn beauftragen, er solle ein Schaf für soviel Euro verkaufen, wie die Herde Schafe hat. Der Mittelsmann bringt den Erlös in lauter 10 € - Scheinen und einem Rest an Kleingeld, der keinen vollen 10 € - Schein mehr ergibt.

Die Brüder teilen das Geld zunächst so, dass beide gleich viele 10 € - Scheine erhalten. Dabei bleiben ein 10 € - Schein und der Kleingeldrest übrig.

Da sagte der ältere zum jüngeren Bruder: „Ich nehme den Schein und du bekommst den Rest und ein von mir gekauftes Taschenmesser; dann haben wir beide gleich viel bekommen.“

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben der Preis des Taschenmessers eindeutig ermitteln lässt. Ist dies der Fall, dann gib diesen Preis an. (6 Punkte)

Aufgabe 4 (57. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe)

Wir betrachten ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 6 cm. Ein Punkt P liegt derart auf der Diagonalen \overline{AC} , dass der Flächeninhalt des Vierecks BCDP ein Drittel des Flächeninhalts des Quadrates ABCD ist.

Ermittle die Abstände des Punktes P von der Geraden AB und BC. (7 Punkte)

[Hinweis: Alle gesuchten Lösungen sind mit geometrischen Argumenten exakt zu bestimmen. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind dafür nicht zulässig, da diese niemals exakt sind.]

Aufgabe 5

In dieser Aufgabe geht es um die sogenannten „Mittelungleichungen“.

- Das arithmetische Mittel für n positive rationale Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ lautet:

$$AM = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

- Das geometrische Mittel für n positive rationale Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ lautet:

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

- Das harmonische Mittel für n positive rationale Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ lautet:

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Beweise folgende Sätze:

- a) Das geometrische Mittel \sqrt{ab} zweier positiver rationaler Zahlen a und b ist stets größer oder gleich dem harmonischen Mittel $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ dieser Zahlen. (3 Punkte)
- b) Das arithmetische Mittel $\frac{c+d}{2}$ zweier positiver rationaler Zahlen c und d ist stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen. (3 Punkte)

[Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 4.3. (Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen) sowie in „Regeln“ auf Seite 14 die Regeln (1) und (2.2.1).]

[*Bemerkung:* Die Ungleichung $AM \geq GM \geq HM$ gilt für beliebig viele positive rationale Zahlen.]

Erinnerung

Das vierte Präsentreffen wird am Samstag, den 25.05.2024, von zehn bis zwölf Uhr stattfinden. Wir treffen uns 9:45 Uhr bei den Fahrstühlen im Augusteum der Universität Leipzig, um dann gemeinsam zum Seminarraum zu gehen.

Bemerkungen

Ihr erhaltet nun auch Beispiellösungen für die fünfte Aufgabenserie. Damit könnt ihr eure eigenen Lösungen vergleichen oder Inspirationen für die folgenden Aufgabenserien sammeln. Die Beispiellösungen dienen nur als Orientierung. Es gibt also auch andere Lösungsmöglichkeiten, die richtig wären und nicht dargestellt sind. Wenn ihr eine andere Idee hattet, die nicht in den Beispiellösungen ist, heißt es nicht, dass diese falsch war.

Zudem erhaltet ihr mit diesem Brief die Korrektur der fünften Aufgabenserie (falls ihr diese abgegeben habt). Wenn ihr die fünfte Serie an mich gesendet habt und keine Rückmeldung erhaltet, meldet euch gern bei mir – vielleicht ist der Brief dann nicht angekommen.

Ich wünsche dir viel Freude und Erfolg bei der Arbeit!

Letzter Einsendetermin: Freitag, der 10.05.2024

Die Lösungen bitte senden an: Franziska Wolf
Rilkestraße 98
04416 Markkleeberg

Bei Fragen gern per E-Mail an mich wenden: franziska.wolf03@gmail.com