

# KORRESPONDENZKREIS MATHEMATIK

Aufgaben

Klasse 7

2023/24

Serie 5

## Aufgabe 1

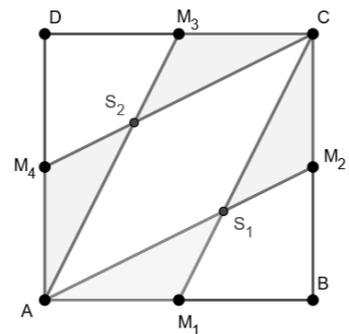
a) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ . Bei Division durch 7 lässt  $a$  den Rest 5 und  $b$  lässt den Rest 3. Welchen Rest lässt dann die Summe der Quadrate dieser Zahlen bei Division durch 7? (3 Punkte)

b) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ . Bei Division durch 24 lässt  $a$  den Rest 7 und  $b$  lässt den Rest 5. Durch welche natürlichen Zahlen ist dann  $a^2 - b^2$  stets teilbar? (3 Punkte)

[Verwende das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel. Hinweis: Bei Teilaufgabe b) gibt es acht Lösungen.]

## Aufgabe 2 (58. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe)

Gegeben ist ein Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $a$ . Mit  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  und  $M_4$  werden in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  und  $\overline{AD}$  bezeichnet (siehe Abbildung). Der Schnittpunkt der Geraden  $AM_2$  und  $CM_1$  wird mit  $S_1$  bezeichnet. Der Schnittpunkt der Geraden  $AM_3$  und  $CM_4$  wird mit  $S_2$  bezeichnet.



a) Ermittle den Flächeninhalt des Parallelogramms  $AM_2CM_4$ . (2 Punkte)

b) Zeige, dass die Summe der Flächeninhalte der grauen Dreiecke  $AM_1S_1$ ,  $CS_1M_2$ ,  $CM_3S_2$  und  $AS_2M_4$  unter diesen Voraussetzungen genau  $\frac{1}{3} a^2$  beträgt. (4 Punkte)

## Aufgabe 3

Es seien  $x$  und  $y$  zwei rationale Zahlen. Verkleinert man  $x$  auf 75%, dann erhält man 225. Vergrößert man  $y$  um 20%, dann erhält man ebenfalls 225.

a) Zeige, dass  $x = 300$  und  $y = 187,5$  gilt.

b) Wie viel Prozent beträgt  $y$  von  $x$ ?

c) Um wie viel Prozent muss man  $y$  vergrößern, so dass  $x = y$  gilt?

d) Auf wie viel Prozent muss man  $x$  verkleinern, so dass  $x + y = 225$  gilt? (6 Punkte)

## Aufgabe 4

Ermittle alle Tripel  $(x; y; z)$  aus natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Summe der drei Zahlen beträgt 945.

(2) Ein Sechstel der Zahl  $x$  ist gleich einem Siebentel der Zahl  $y$  und auch gleich einem Achtel der Zahl  $z$ .

(6 Punkte)

### **Aufgabe 5**

a) Die Zwillinge Sebastian und Kathrin und ihre Eltern sind jetzt zusammen 100 Jahre alt. Als die Zwillinge geboren wurden, waren ihr Vater 27 Jahre und ihre Mutter 25 Jahre alt. Wie alt sind die Familienmitglieder jetzt? (3 Punkte)

b) Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele hatte er am Anfang? (3 Punkte)

---

### **Erinnerung**

Das dritte Präsenztreffen findet am Samstag, den 06.04.2024, von zehn bis zwölf Uhr statt. Wir treffen uns 9:45 Uhr bei den Fahrstühlen im Augusteum der Universität Leipzig, um dann gemeinsam zum Seminarraum zu gehen. Das vierte Präsentreffen wird am Samstag, den 25.05.2024, ebenfalls von zehn bis zwölf Uhr stattfinden.

### **Bemerkungen**

Ihr erhaltet nun auch Beispiellösungen für die vierte Aufgabenserie. Damit könnt ihr eure eigenen Lösungen vergleichen oder Inspirationen für die folgenden Aufgabenserien sammeln. Die Beispiellösungen dienen nur als Orientierung. Es gibt also auch andere Lösungsmöglichkeiten, die richtig wären und nicht dargestellt sind. Wenn ihr eine andere Idee hattet, die nicht in den Beispiellösungen ist, heißt es nicht, dass diese falsch war.

Zudem erhaltet ihr mit diesem Brief die Korrektur der vierten Aufgabenserie (falls ihr diese abgegeben habt). Wenn ihr die vierte Serie an mich gesendet habt und keine Rückmeldung erhaltet, meldet euch gern bei mir – vielleicht ist der Brief dann nicht angekommen.

---

Ich wünsche dir viel Freude und Erfolg bei der Arbeit!

### **Letzter Einsendetermin: Montag, der 08.04.2024**

Die Lösungen bitte senden an: Franziska Wolf  
Rilkestraße 98  
04416 Markkleeberg

Ihr könnt die Lösungen natürlich auch gern beim Präsenztreffen am 06.04.2024 abgeben :)

Bei Fragen gern per E-Mail an mich wenden: [franziska.wolf03@gmail.com](mailto:franziska.wolf03@gmail.com)