Korrespondenzzirkel Klasse 6 - Serie 4

Liebe Schülerinnen und Schüler,
in diesem Brief erhaltet ihr die Musterlösung zur dritten Serie sowie die Aufgaben der vierten Serie. Die Musterlösung zeigt einen *möglichen* Lösungsweg. Euer Weg kann genauso richtig sein, auch wenn er nicht exakt der Musterlösung entspricht.
Außerdem möchten wir euch auf unseren zweiten Präsenzzirkel am 20.01.2024 von 10 bis 12 Uhr hinweisen. Bitte schreibt Martin in einer E-Mail an mwille04@gmx.de, ob ihr kommt. Wir treffen uns wieder 9:55 Uhr bei den Computern im Neuen Augusteum der Uni Leipzig am Augustusplatz. Die Termine und Orte stehen auch auf der Webseite des Zirkels, https://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Zirkel.24.6-K.

Aufgabe 1 - Schach und Domino

Nehmen wir an, wir hätten ein Schachbrett (8×8), ein kleineres 4×4-Brett und insgesamt 32 Dominosteine, wobei wir mit einem Dominostein immer genau zwei benachbarte Felder abdecken können (die Steine haben also die Maße 1×2). Wir gehen davon aus, dass Steine im folgenden immer genau zwei benachbarte Einzelfelder vollständig bedecken.

- Betrachten wir zuerst das kleine Brett mit den Maßen 4×4. Skizziere eine Aufteilung, wie dieses Brett mit genau 8 Dominosteinen vollständig abgedeckt werden kann. Funktioniert das auch mit 6 Steinen, wenn wir die vier Ecken aussparen? Wenn ja, zeige eine Lösung, wenn nein, begründe, warum es keine gibt.

- Ein ganzes 8×8-Schachbrett nun mit 32 Dominosteinen auszufüllen wäre sicherlich einfach. Ist es auch möglich, zwei gegenüberliegende Ecken auszusparen und das verbleibende Brett mit 31 Dominosteinen abzudecken? Wenn ja, zeige eine Lösung, wenn nein, begründe, warum es keine gibt.
  (Tipp: Schau dir das Problem erst wieder auf kleineren Brettern an und vergiss nicht, dass du es mit einem Schachbrett zu tun hast...)

Aufgabe 2 - Verwinkelt

Doris Dreieck hat sich im Mathematik-Unterricht ganz besondere Geometrie-Dreiecke gebastelt. Diese haben jeweils einen rechten Winkel, sind aber nicht gleichschenklig; stattdessen hat das erste Dreieck die zusätzlichen Winkel $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$, das zweite hingegen $\alpha = 20°$ und $\beta = 70°$.
Man konstruiere (und gebe eine entsprechende Konstruktionsanleitung an) mithilfe dieser Dreiecke die folgenden Winkelgrößen: $10°, 50°, 100°, 130°, 210°$. Gib für den Fall bei $130°$ noch eine zweite Konstruktionsmöglichkeit an!

Aufgabe 3 - Automatentheorie

In der informatischen Disziplin der Automatentheorie betrachtet man Systeme, die nach bestimmten, festgelegten Regeln einen Zustand in einen anderen überführen können. Im Folgenden werden euch je ein Ausgangszustand, ein gewünschter Endzustand und eine Liste an möglichen Umformregeln präsentiert. Stellt einen Schritt-für-Schritt-Weg (immer unter Angabe der genutzten Regel) auf, wie der Ausgangszustand regelkonform in den Endzustand überführt werden kann!

- Ausgangszustand: $(ab)(b'a')$. Gewünschter Endzustand: 1.
  Umformregeln:

  1. Klammern dürfen beliebig gesetzt und entfernt werden.
  2. Neben einem Buchstaben darf beliebig eine 1 gesetzt werden.
  3. 1en dürfen, wenn sie neben einem Buchstaben stehen, entfernt werden.
  4. 1en darf man durch einen Buchstaben und seine danebenstehende Strichvariante (z.B. 1 wird zu aa' oder $a'a$) ersetzen und umgekehrt.

- Ausgangszustand: a. Gewünschter Endzustand: $abcdadcdad$.
  Umformregeln ($\longrightarrow$ heißt "kann ersetzt werden durch"):

  1. $a \longrightarrow ab$
  2. $b \longrightarrow cc$
  3. $c \longrightarrow da$
  4. $acc \longrightarrow c$
  5. $c \longrightarrow b$
  6. $da \longrightarrow d$.

(Hinweis zum Aufschreiben: Schreibt am besten immer nur die Zustände und die jeweils genutzte Regel auf, z.B. $a \xrightarrow{(1)} ab \xrightarrow{(2)} acc \dots$*)*

Aufgabe 4 - Zahlenfolgen

Als "Zahlenfolge" bezeichnen wir in der Mathematik eine Aneinanderreihung von Zahlen, die immer nach einem bestimmten Muster fortgeführt wird. (a_n bezeichnet dabei grundsätzlich das n-te Folgenglied der Folge a und wir fangen mit dem Nummerieren bei 0 an.) Man unterscheidet grundsätzlich zwei verschiedene Arten, eine Zahlenfolge mithilfe einer "Bildungsvorschrift" zu beschreiben: Bei einer *expliziten* Darstellung haben wir eine Formel, in die wir n einsetzen können, um das n-te Folgenglied zu bekommen, z.B. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Bei der *rekursiven* Darstellung hingegen hängt der Wert des n-ten Folgeglieds von den vorherigen ab, z.B. $b_{n+1} = b_n + 2$. Rekursive Darstellungen brauchen auch immer noch einen oder mehrere Startwerte, z.B. $b_0 = 1$.

- Überführe die als Beispiele genannten Folgen in die jeweils andere Form (also a in eine rekursive und b in eine explizite). Rechne dafür die ersten paar Folgenglieder aus, um ein Muster erkennen zu können.
- Auch die Primzahlen und die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* sind Zahlenfolgen. Für die Primzahlen gibt es weder eine explizite noch eine rekursive Bildungsvorschrift, die Fibonacci-Zahlen f sind rekursiv definiert als:
  $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ (also jedes neue Folgenglied ist die Summe der beiden vorherigen).
  Finde alle Primzahlen, die auch Fibonacci-Zahlen sind (im Zahlenraum bis 1000).

Die Lösungen zu dieser Aufgabenserie schickt ihr bitte **(im PDF-Format)** bis zum **6. Januar** an:
mwille04@gmx.de
oder, wenn euch das nicht möglich ist, per Post an:

Jasmin Radow
Schenkendorfstraße 62
04275 Leipzig

Falls ihr Fragen oder Fehler in den Aufgaben oder der Musterlösung gefunden habt, könnt ihr uns gern eine Email an mwille04@gmx.de schreiben. Viel Spaß beim Knobeln!
Martin und Jasmin