1 Fünf treten gegeneinander an

Ich kann erstmal 5 Fünfergruppen bilden. Nach diesen fünf Durchläufen lasse ich die Besten gegeneinander antreten, und erhalte so (nach 6 Durchläufen) schonmal den/die Beste/n überhaupt.

Die restlichen 24 könnte ich wieder in Fünfergruppen aufteilen (in einer sind nur 4), die wieder alle spielen lassen und dann die besten gegeneinander antreten lassen, und das ganze mit den verbliebenen 23 nochmal, macht **24** Durchläufe.

Aber das ist natürlich Quatsch, nach den ersten fünf Durchläufen kennen wir ja schon die Reihenfolge innerhalb der Gruppe, also brauchen wir das nicht nochmal durchzuspielen.

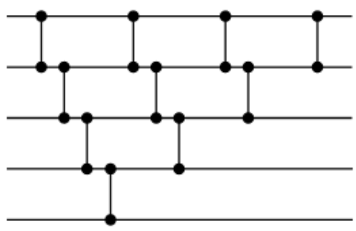
Wir brauchen nur noch einen Durchlauf zwischen den Gruppenbesten (in einem Fall dem zweitbesten), und noch einen Durchlauf zwischen den *danach* verbliebenen Gruppenbesten, macht zusammen **8** Durchläufe.

Aber den besten aus der schlechtesten Gruppe brauchen wir gar nicht antreten zu lassen, schließlich gibt es vier, die besser sind als er, er kann also weder Zweit- noch Drittbester von allen sein. Das gleiche gilt für den besten der zweitschlechtesten Gruppe.

Für die Plätze zwei und drei bleiben nach den ersten 6 Durchläuden als Kandidaten übrig: der Zweit- und Drittbeste der besten Gruppe, der Erst- und Zweitbeste der zweitbesten Gruppe, und der Beste der Drittbesten Gruppe, macht zusammen fünf, das heisst wir kommen mit einem weiteren Durchlauf, also insgesamt **7 Durchläufen** hin – der Beste und Zweitbeste des letzten Durchlaufes sind genau der Zweit und Drittbeste insgesamt.

2 Fünf ordnen sich um

Wenn man einfach in jeder Runde zwei gegeneinander spielen lässt (und natürlich wirklich sicher gehen will, dass bei *jeder* Ausgangskonstellation am Ende die richtige Reihenfolge entsteht), kann man sich Muster wie dieses überlegen:

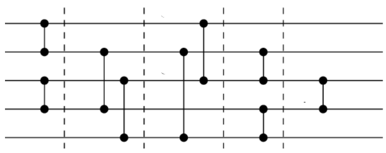


Das kann man sich so vorstellen, dass ja vielleicht zu Beginn der Schlechteste an Position 1 steht, der so "nach unten durchgereicht" wird. Wo auch immer der Schlechteste stand – nach den ersten vier Runden steht er an letzter Position, da der Verlierer der

1. Runde gegen den an Position 3 spielt, dann *der* Verlierer gegen den an Position 4, dann *der* Verlierer gegen den an Position 5 – und *dieser* Verlierer steht dann sicher auf Position 5.

Das gleiche braucht man also nur mit den Positionen 1–4 wiederholen, dann mit 1–3, und dann nochmal mit den ersten beiden. Es könnte ja sein, dass der Beste zu Beginn auf Position 5 stand, dann steht er nach den ersten 4 Runden "nur" auf Position 4. Man kann das ganze auch auf den Kopf stellen. Auf diese Weise braucht man **10 Runden**.

Es ist klar, dass es in weniger Runden gehen muss, wenn wir Spiele parallel durchführen, z.B. in der ersten Runde 1 gegen 2 und 3 gegen 4. In der nächsten Runde können wir dann schonmal die Verlierer gegeneinander spielen lassen. Theoretisch könnten wir auch in der gleichen Runde die Gewinner gegeneinander spielen lassen, andererseits ist es sinnvoll, die 5 auch möglichst frühzeitig einzubeziehen. Es gibt viele Möglichkeiten, das ganze in **5 Runden** zu schaffen, eine davon ist hier abgebildet:



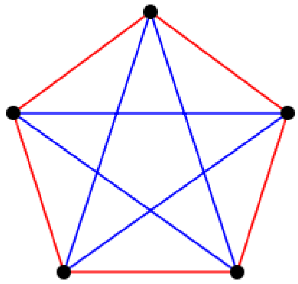
Weniger sind nicht möglich, wenn man z.B. die letzte Runde weglassen wollen würde, ergäbe sich für eine völlig umgekehrte Anfangsreihenfolge noch keine sortierte Endreihenfolge:

Beginn	Runde 1	Runde 2	Runde 3	Runde 4	Runde 5
5	4	4	1	1	1
4	5	3	2	2	2
3	2	1	4	4	3
2	3	5	5	3	4
1	1	2	3	5	5

Solche "Rundenabfolgen" nennt man auch Sortier-Netzwerke, und sie sind sehr wichtig, wenn man in einer genau vorgegebenen Zeit eine bestimmte Anzahl Werte in die richtige Reihenfolge bekommen möchte.

3 Fünf feiern eine Party

Eine Lösung sieht man hier, wenn man rote Linien als "kennen sich nicht" und blaue als "kennen sich" deutet. Man kann keine drei Punkte wählen, die untereinander durch nur blaue oder nur rote Linien verbunden sind.



Wie wäre es mit 6 Leuten? Wenn wir sie wieder so als Punkte zeichnen, wählen wir erst einen beliebigen Punkt aus, nennen wir ihn P_1. Von den 5 abgehenden Linien müssen *mindestens* drei die gleiche Farbe haben (da es ja nur zwei Farben gibt). Wir nehmen mal an, das wäre blau (das Argument geht genauso mit rot), und die Punkte am anderen Ende der Linie nennen wir P_2, P_3 und P_4. Wenn irgendeine der Linien zwischen P_1 und P_2, P_2 und P_3 oder P_3 und P_4 blau ist, haben wir ein blaues Drieck zwischen P_1 und diesen beiden Punkten. Wenn aber alle rot sind, bilden sie selber ein rotes Dreieck. Was man auch anstellt, bei 6 Leuten gibt es immer ein gleichfarbiges Dreieck.

Der Mathematiker, der dieses Problem zuerst untersucht hat, heisst Frank Ramsey, und die Zahl von Leuten die man mindestens braucht, damit immer eine Gruppe von X Leuten gibt, die sich untereinander alle kennen oder alle nicht kennen heißt *Ramsey-Zahl* von X. Wir haben eben gesehen, dass die Ramsey-Zahl von 3 gleich 6 ist. Ein bißchen aufwändiger ist es schon, nachzuprüfen, dass die Ramsey-Zahl von 4 gleich 18 ist. Aber jetzt kommt **der Knüller**: Kein Mensch weiß, was die Ramsey-Zahl von 5 ist. Man hat es immer weiter eingrenzen können, und seit 2017 (also ungefähr als ihr in die Schule gekommen seid) weiss man, dass sie zwischen 43 und 48 liegen muss, aber trotz aller Überlegungen und Computerberechnungen kann es bis heute niemand genauer sagen.

4 Mit Fünf zählen

Wenn man nur die Ziffern von 0 bis 4 hätte, käme nach 1,2,3 und 4 die "10", dann 11,12,13,14... und dann 20. Bis hierhin hätten wir aber nur zehn Zahlen aufgeschrieben. Die größte zweistellige Zahl ist "44" und man muss 24 Zahlen aufschreiben um bis dahin zu kommen. Genauso wie $99 = 10 \times 9 + 9$ für zehn Ziffern ist $24 = 5 \times 4 + 4$ für 5 Ziffern, wenn man es gleich ausrechnen will, ohne es aufzuschreiben.

Bonus: Mit 5 Fingern kann man insgesamt 32 Zahlen darstellen, angefangen mit der Faust (kein Finger ausgestreckt), bis hin zu allen Fingern ausgestreckt. Überlegen kann man sich das so: Der Daumen kann ausgestreckt sein oder nicht, also muss es doppelt soviele Zahlen geben wie ich it den restlichen vier Fingern darstellen kann. Wie viele sind das? Der Zeigefinger kann ausgestreckt sein oder nicht, also sind es doppelt so viele Muster wie ich mit Mittel-, Ring und kleinem Finger darstellen kann ... usw., mit dem kleinen Finger kann ich zwei Zahlen darstellen (ausgestreckt oder nicht), also sind es insgesamt $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times = 32$. Natürlich, wenn man bereits Binärzahlen kennt, ist die Lösung gleich klar.