

KORRESPONDENZKREIS MATHEMATIK

Freistaat Sachsen

Aufgaben

Klasse 8

2021/22

Serie 5

1) Sei $ABCD$ ein beliebiges Tetraeder (d.h. ein ebenflächig begrenzter Körper, dessen vier Seitenflächen Dreiecke sind). Sei E, F, G bzw. H der Mittelpunkt der Kante $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$.

Betrachte das Viereck $EFGH$ und äußere eine Vermutung, um welche Art von Viereck es sich handelt. Beweise deine Vermutung.

Was lässt sich über das Viereck $EFGH$ speziell aussagen, wenn $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder ist (dessen vier Seitenflächen kongruente gleichseitige Dreiecke sind)?

Berechne für diesen speziellen Fall den Inhalt des Vierecks $EFGH$. (6 P)
[Wiederhole im „Arbeitsmaterial Kl.8“ den Abschnitt 2.1.]

2)

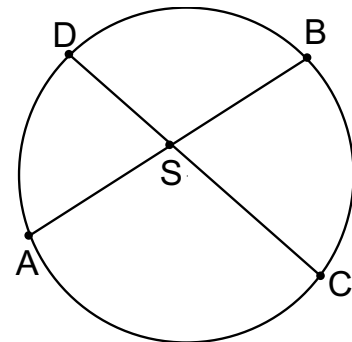
a) Beweise den folgenden Satz:

Wenn $ABCD$ ein Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S ist, dann sind die Dreiecke ABS und DCS zueinander ähnlich. (3 P)

b) Beweise den folgenden *Sehnensatz*:

Wenn zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eines Kreises einander im Punkt S schneiden, dann ist das Produkt der Abschnitte von $\overline{AB}$ gleich dem Produkt der Abschnitte von $\overline{CD}$, d.h. es gilt

$$\overline{AS} \cdot \overline{SB} = \overline{CS} \cdot \overline{SD}. \quad (3 \text{ P})$$



Stelle die Beweise in Form eines Beweisschemas dar.

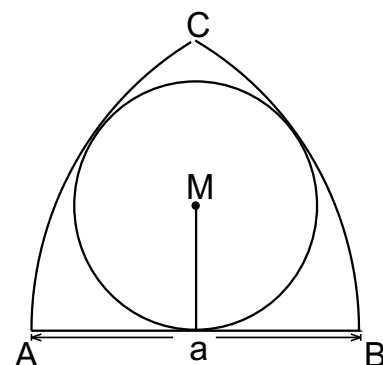
[Wiederhole in „Sätze“ den Abschnitt VIb) (Kreis und Winkel) und eigne dir im Abschnitt VII (Ähnlichkeit - Strahlensätze) den Inhalt der Sätze Z5) und S6) an. Lies in „Beweismittel“ den Abschnitt 4. (Beziehungen zwischen Dreiecken) und den Abschnitt 2. (Beziehungen zwischen Strecken).]

3) Eine dreieckige Fläche wird (wie in nebenstehender Figur angegeben) von einer Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge a sowie von zwei Kreisbögen begrenzt, die zu den Kreisen $k(A; a)$ bzw. $k(B; a)$ gehören.

Dieser dreieckigen Figur sei ein Kreis mit dem Radius r einbeschrieben, der alle drei Begrenzungslinien berührt.

Drücke r durch a aus.

(6 P)



4) Über drei rationale Zahlen werden folgende Aussagen gemacht:

- (1) Der Quotient aus der ersten und der dritten Zahl ist positiv.
- (2) Die Summe aus der ersten und der dritten Zahl ist negativ.
- (3) Das Produkt aller drei Zahlen ist positiv.

a) Was lässt sich aufgrund dieser drei Bedingungen über die Vorzeichen der drei Zahlen aussagen?

Es gelten ferner folgende Aussagen:

- (4) Subtrahiert man die dritte von der ersten Zahl, dann erhält man die zweite Zahl.
- (5) Bildet man die Kehrwerte der drei Zahlen, dann erhält man drei ganze Zahlen.
- (6) Die Summe aller drei Zahlen beträgt $-\frac{1}{3}$. Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man die zweite durch die dritte Zahl teilt.

b) Ermittle alle Tripel rationaler Zahlen, welche die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig erfüllen.

Stelle die Lösung in der Form dar, wie dies in Aufgabe 4) der Serie 2 geschieht (Einzigkeitsnachweis und Existenznachweis) (6P)

5)

a) Zerlege so weit wie möglich in Faktoren:

$$\begin{aligned} 6u^4 - 6 &= \dots ; & 12x^3y - 27xy^3 &= \dots ; \\ 20a^3b - 60a^2b^2 + 45ab^3 &= \dots ; & 7x^5 + 14x^3 + 7x &= \dots . \end{aligned} \quad (3 \text{ P})$$

b) Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung (im Bereich der rationalen Zahlen):

$$\frac{3}{x^2 + 2x} - \frac{4}{2x^2 - 8} = \frac{1}{x^2 - 4x + 4} . \quad (3 \text{ P})$$

[Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 4.3. (Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen); wiederhole im „Arbeitsmaterial Kl.7“ den Abschnitt 4.2. (Regeln für das äquivalente Umformen).]

Letzter Einsendetermin: Sonnabend 26.3.