

Aufgabenserie 1 (Schuljahr 2026/2027)

Einsendungen bitte bis 28.09.2026 an Prof. Cordula Bernert, Neusorger Str. 10, 09648 Altmittweida oder cbernert@hs-mittweida.de (Jede Zusendung wird nach Empfang elektronisch bestätigt. Sollte diese Antwort ausbleiben, fragen Sie bitte elektronisch nach, um Datenverluste zu vermeiden.)

Aufgabe 1-1.

Jemand hat 55 Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er 10 Kisten; in die erste passt genau ein Ball, in die zweite passen genau zwei Bälle usw. Zeigen Sie, dass es möglich ist, alle Bälle so in den Kisten zu verstauen, dass in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen.

(5 Punkte)

Aufgabe 1-2.

Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $a^b + 7 = c$, wobei a , b und c Primzahlen sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 1-3.

Man finde alle positiven ganzen Zahlen n , die gleich der Summe ihrer Quersumme $QS(n)$ und ihres Querproduktes $QP(n)$ sind, d.h. es gilt $n = QS(n) + QP(n)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 1-4.

Konstruieren Sie einen Rhombus $\square ABCD$ aus $e + f$ und α . Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$, f die Länge der Diagonalen $\overline{BD}$ und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.

(6 Punkte)

Aus den beiden folgenden Aufgaben können Sie eine auswählen. Für die Aufgabenteile (a) und (b) werden maximal je 2 Punkte vergeben, für (c) 4 Punkte, so dass sich insgesamt 8 Punkte pro Aufgabe erreichen lassen. Bearbeiten Sie beide Aufgaben, so wird nur die Aufgabe mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Ist jedoch die Punktesumme für beide Aufgaben größer als 8, erhalten Sie einen Zusatzpunkt, ist sie größer als 12, gibt es zwei Zusatzpunkte. Für die gesamte Aufgabenserie kann man also maximal 32 Punkte erreichen.

Aufgabe 1-5A.

Es sind

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

das arithmetische Mittel und

$$g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„ S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ “.

- (a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.
- (b) Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, sodass für $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ und $x_1 = m$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.
- (c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

Aufgabe 1-5B.

- (a) Man beweise die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen n .
- (b) Man beweise die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3) \quad \text{für } n > 1.$$

- (c) Man finde natürliche Zahlen n , für die näherungsweise gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2023.$$