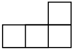
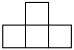
Aufgaben zum Aufwärmen

- Finde alle Teiler von 12.
- Ordne folgende Zahlen der Größe nach: $\frac{5}{7}, 0.7, \frac{7}{11}$
- Wie viele Teile der Form  kann man aus einem 5×5 Quadrat ausschneiden? Wie viele sind es für  ?
- Ein Restaurant hat einige quadratische Tische und einige Stühle. Wenn alle Tische einzeln stehen, so fehlen 6 Stühle. Stehen die Tische immer zu zweit zusammen, sind 4 Stühle übrig. Wie viele Stühle hat das Restaurant?
- Aus einem Papierstreifen steht die Zahl 2581953764. Wie groß ist die minimale Summe der drei Zahlen, die entstehen, wenn man das Stück in drei Teile teilt?
- Zusatz: Ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 6cm größer als ein Quadrat mit Seitenlänge 4cm?

Primfaktorzerlegung

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, also genau zwei Teiler haben.

Bsp: 2,3,5,7,11

Theorem

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Das nennt man die Primfaktorzerlegung (PFZ) der Zahl.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \cdot 3 = 3^2 \\ 10 &= \\ 11 &= \\ 12 &= \end{aligned}$$

Primfaktorzerlegung

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, also genau zwei Teiler haben.

Bsp: 2,3,5,7,11

Theorem

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Das nennt man die Primfaktorzerlegung (PFZ) der Zahl.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \cdot 3 = 3^2 \\ 10 &= 2 \cdot 5 \\ 11 &= \\ 12 &= \end{aligned}$$

Primfaktorzerlegung

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, also genau zwei Teiler haben.

Bsp: 2,3,5,7,11

Theorem

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Das nennt man die Primfaktorzerlegung (PFZ) der Zahl.

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
9 &= 3 \cdot 3 = 3^2 \\
10 &= 2 \cdot 5 \\
11 &= 11 \\
12 &=
\end{aligned}
$$

Primfaktorzerlegung

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, also genau zwei Teiler haben.

Bsp: 2,3,5,7,11

Theorem

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Das nennt man die Primfaktorzerlegung (PFZ) der Zahl.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \cdot 3 = 3^2 \\ 10 &= 2 \cdot 5 \\ 11 &= 11 \\ 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Wie kommt man auf die Primfaktorzerlegung von n?

- Finde den kleinsten Primteiler p_1 von n und berechne $n_1 = n/p_1$.
- Wiederhole den Schritt mit n_1: das gibt p_2 und n_2
- Fahre damit fort, bis die Zahl n_k für irgendein k eine Primzahl ist, dann ist die Primfaktorzerlegung:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 84 &= 2 \cdot 42 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 21 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7. \end{aligned}$$

Teiler finden

Bei kleinen Zahlen kann man durch Probieren alle Teiler zu finden. Beispielsweise hat 12 die Teiler 1,2,3,4,6,12.

Mit der PFZ kann man das systematisieren: $12 = 2^2 \cdot 3$. Alle Teiler von 12 sind also aus diesen Faktoren zusammengesetzt, beispielsweise $2^2, 2 \cdot 3$.

Man kann also den Faktor 2^a mit 3^b kombinieren, wobei $a \in \{0, 1, 2\}$ und $b \in \{0, 1\}$ ist. Somit kommt man auf $3 \cdot 2 = 6$ Teiler.

- Wie viele Teiler hat 84?
- Nenne zwei Zahlen, die genau 5 Teiler haben.
- Zusatz: Stelle eine allgemeine Formel für die Anzahl der Teiler einer Zahl auf mit PFZ $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{a_k}$.

Bis hierhin sind wir am 11.12. gekommen

Anschließend habe ich einen Stehaufkreisel präsentiert und wir haben versucht, Sakai-Kreisel aus Büroklammern zu basteln.

Beide findet man im Internet. Die folgenden Folien habe ich nicht geschafft, euch zu zeigen. Wenn ihr wollt, könnt ihr sie euch gern anschauen und mir gegenenenfalls Fragen dazu per Email stellen.

Der größte gemeinsame Teiler

Definition

Der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(m, n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$ ist die größte natürliche Zahl, die m und n teilt.

Beispiel: $\mathrm{ggT}(4, 6) = 2$.

Finde $\mathrm{ggT}(12, 13), \mathrm{ggT}(10, 15), \mathrm{ggT}(21, 15)$.

Der ggT von zwei Zahlen ist das Produkt aller Primfaktoren, die in beiden PFZ vorkommen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 56 &= 7 \cdot 8 = 2^3 \cdot 7 = \mathbf{2^2} \cdot \mathbf{7} \cdot 2 \\ 84 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = \mathbf{2^2} \cdot \mathbf{7} \cdot 3 \\ \mathrm{ggT}(56, 84) &= 2^2 \cdot 7 = 28. \end{aligned}$$

Der Euklidische Algorithmus

Definition

Der Euklidische Algorithmus ist eine Methode, um schnell den ggT von großen natürlichen Zahlen a, b mit $a > b$ bestimmen zu können.

Idee: Für zwei Zahlen a, b gilt: jeder Teiler von a und b ist auch ein Teiler von $a + b$ und $a - b$. Insbesondere ist $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, a - b)$.
Algorithmus:

- Teile a durch b mit Rest: $a = k_1 \cdot b + r_1$
- Nun teile b mit Rest durch r_1:

$$b = k_2 \cdot r_1 + r_2$$

- Wiederhole diesen Schritt bis

$$r_i = k \cdot r_{i+1} + 0$$

  Dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = r_{i+1}$.

Was ist $\text{ggT}(39, 104)$?

$$\begin{aligned} 104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\ 39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\ 26 &= 2 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\text{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\text{ggT}(123, 321)$?

$$321 = 2 \cdot 123 + 75$$

Was ist $\text{ggT}(39, 104)$?

$$\begin{aligned} 104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\ 39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\ 26 &= 2 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\text{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\text{ggT}(123, 321)$?

$$\begin{aligned} 321 &= 2 \cdot 123 + 75 \\ 123 &= 1 \cdot 75 + 48 \end{aligned}$$

Was ist $\mathrm{ggT}(39, 104)$?

$$\begin{aligned} 104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\ 39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\ 26 &= 2 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\mathrm{ggT}(123, 321)$?

$$\begin{aligned} 321 &= 2 \cdot 123 + 75 \\ 123 &= 1 \cdot 75 + 48 \\ 75 &= 1 \cdot 48 + 27 \end{aligned}$$

Was ist $\mathrm{ggT}(39, 104)$?

$$\begin{aligned} 104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\ 39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\ 26 &= 2 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\mathrm{ggT}(123, 321)$?

$$\begin{aligned} 321 &= 2 \cdot 123 + 75 \\ 123 &= 1 \cdot 75 + 48 \\ 75 &= 1 \cdot 48 + 27 \\ 48 &= 1 \cdot 27 + 21 \end{aligned}$$

Was ist $\mathrm{ggT}(39, 104)$?

$$\begin{aligned} 104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\ 39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\ 26 &= 2 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\mathrm{ggT}(123, 321)$?

$$\begin{aligned} 321 &= 2 \cdot 123 + 75 \\ 123 &= 1 \cdot 75 + 48 \\ 75 &= 1 \cdot 48 + 27 \\ 48 &= 1 \cdot 27 + 21 \\ 27 &= 1 \cdot 21 + 6 \end{aligned}$$

Was ist $\mathrm{ggT}(39, 104)$?

$$
\begin{aligned}
104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\
39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\
26 &= 2 \cdot 13 + 0
\end{aligned}
$$

Also ist $\mathrm{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\mathrm{ggT}(123, 321)$?

$$
\begin{aligned}
321 &= 2 \cdot 123 + 75 \\
123 &= 1 \cdot 75 + 48 \\
75 &= 1 \cdot 48 + 27 \\
48 &= 1 \cdot 27 + 21 \\
27 &= 1 \cdot 21 + 6 \\
21 &= 3 \cdot 6 + 3
\end{aligned}
$$

Was ist $\mathrm{ggT}(39, 104)$?

$$
\begin{aligned}
104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\
39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\
26 &= 2 \cdot 13 + 0
\end{aligned}
$$

Also ist $\mathrm{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\mathrm{ggT}(123, 321)$?

$$
\begin{aligned}
321 &= 2 \cdot 123 + 75 \\
123 &= 1 \cdot 75 + 48 \\
75 &= 1 \cdot 48 + 27 \\
48 &= 1 \cdot 27 + 21 \\
27 &= 1 \cdot 21 + 6 \\
21 &= 3 \cdot 6 + 3 \\
6 &= 2 \cdot 3 + 0
\end{aligned}
$$

Was ist $\mathrm{ggT}(39, 104)$?

$$\begin{aligned} 104 &= 2 \cdot 39 + 26 \\ 39 &= 1 \cdot 26 + 13 \\ 26 &= 2 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(39, 104) = 13$.
Was ist $\mathrm{ggT}(123, 321)$?

$$\begin{aligned} 321 &= 2 \cdot 123 + 75 \\ 123 &= 1 \cdot 75 + 48 \\ 75 &= 1 \cdot 48 + 27 \\ 48 &= 1 \cdot 27 + 21 \\ 27 &= 1 \cdot 21 + 6 \\ 21 &= 3 \cdot 6 + 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(123, 321) = 3$