Korrespondenzzirkel Klasse 6 - Drittes Treffen

Arne Wolf

05.03.2022

Aufwärmaufgaben

Ein * kennzeichnet schwierigere Aufgaben.

- Wie viele verschiedene Zahlen kann man durch Vertauschen der Ziffern von 4772 erhalten?
- Vier Würfel der Kantenlänge 1 werden irgendwie zusammengeklebt (Seite auf Seite). Wie groß ist die Oberfläche der Figur mindestens, wie groß ist sie maximal?
- In Viereck $ABCD$ sind folgende Winkel bekannt: $\angle BAD = 120°$, $\angle CBA = 80°$, $\angle DCA = 50°$, $\angle ADC = 70°$. Wie groß ist $\angle CAB$? Zusatz: Zeichne ein solches Viereck.
  Hinweis: Der Winkel $\angle XYZ$ meint den Winkel bei Y zwischen den Geraden XY und YZ.
- Auf welche Ziffer endet $1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$?
- Ein Pudelzüchter hat in den letzten 10 Jahren insgesamt 180 Welpen großgezogen, in jedem Jahr eine andere Anzahl. Im Jahr 2018 waren es am meisten. Wie viele waren es 2018 mindestens?
- Was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 21 und 35?

* Ich denke mir eine Zahl. Die Zahl hat genau 3 verschiedene Teiler, von denen einer drei ist. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

* Ich kann Obst aus unserer Küche auf drei Arten kombinieren, sodass die Masse der Zusammenstellung jeweils 1 kg ist. Die drei Zusammenstellungen sind: 3 Äpfel und 2 Birnen; ein Apfel, 4 Birnen und 5 Weintrauben; 2 Äpfel, 2 Birnen und 11 Weintrauben. Nimm an, dass Früchte der gleichen Art gleich viel wiegen. Wie viel wiegt dann ein Apfel, eine Birne bzw, eine Weintraube?

Das Schubfachprinzip

Seien n und k natürliche Zahlen. Dem Schubfachprinzip liegt die Beobachtung zu Grunde, dass beim Aufteilen von $n \cdot k + 1$ Murmeln auf k Schubfächer in einem der Schubfächer mindestens $n + 1$ Murmeln liegen. Die Schwierigkeit besteht darin, zu erkennen, wann dieses Prinzip angewendet werden kann. Dafür muss man die Situation mit Murmeln und Schubfächern auf andere Größen übertragen. Meist sind die Schubfächer nicht vorgegeben und man muss sie zuerst einmal geeignet wählen.

Beispiel: Kai hat einfarbige Socken in den Farben grün, blau und rot. Wie viele Socken muss er aus dem Schrank nehmen, bis mit Sicherheit ein paar dabei ist?
Antwort: Wenn er drei Socken zieht, können sie verschiedene Farben haben. Bei vier Socken kann man drei Schubfächer definieren, eines für jede Farbe. Hier ist also $k = 3$ und es werden $4 = 1 \cdot 3 + 1$ Socken (die hier die Rolle der Murmeln einnehmen) gezogen. Also ist $n = 1$. Folglich werden in einem Schubfach $n + 1 = 2$ „Murmeln “ liegen. Das heißt, es sind zwei gleichfarbige Socken dabei.

Beispiel 2: Auf eine kreisförmige Dartscheibe mit Durchmesser 1 m werden fünf Pfeile geworfen. Zeige, dass unter ihnen zwei sind, deren Abstand kleiner ist als 75 cm.
Lösung: Hier ist es zuerst völlig unklar, was die Schubfächer sein sollen. Einen Anhaltspunkt gibt die Tatsache,

dass fünf Pfeile geworfen werden. Das legt nahe, vier Schubfächer zu wählen. Wir können zum Beispiel den Kreis vierteln durch zwei senkrechte Durchmesser. Dann stecken in einem der Viertel zwei Pfeile. Der maximale Abstand von zwei Punkten in so einem Viertelkreis ist die Länge der Diagonale in einem Quadrat mit Seitenlänge $0.5\,\mathrm{m}$. Diese Diagonale hat Länge $\sqrt{2} \cdot 0.5\,\mathrm{m} < 75\,\mathrm{cm}$.
Hier mussten die Schubfächer also künstlich geschaffen werden. Das ist häufig so. Es braucht viel Erfahrung, um die richtigen Ideen für Schubfächer zu haben.

Übungsaufgaben

Dieses Vorgehen könnt ihr nun an den folgenden Aufgaben üben:

- Leipzig hat über 500000 Einwohner. Zeige, dass es darunter 1000 gibt, die am gleichen Tag Geburtstag haben. Folgere weiter, dass es zwei Leipziger gibt, die am gleichen Tag und im gleichen Jahr geboren sind.
- In der Ebene liegen ein Dreieck und eine Gerade, die durch keinen Eckpunkt verläuft. Zeige, dass es eine Dreiecksseite gibt, die nicht von der Geraden geschnitten wird.
- Zeige, dass es unter 19 zweistelligen Zahlen zwei gibt, deren Differenz höchstens 4 ist.
- In einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 2 liegen fünf Punkte. Zeige, dass darunter zwei sind, deren Abstand höchstend 1 ist.
- Gegeben sind 11 natürliche Zahlen. Zeige, dass darunter zwei sind, deren Differenz durch 10 teilbar ist.

* In einem Quadrat der Seitenlänge 1 liegen neun Punkte. Zeige, dass man daraus drei wählen kann, die ein Dreieck mit Flächeninhalt höchstens $\frac{1}{8}$ bilden.
* Zeige, dass es in jedem Raum zwei Menschen gibt, die die gleiche Anzahl anderer Leute kennen. (Dabei darfst du annehmen, dass kennen immer gegenseitig ist.)
* In einem zweidimensionalen Koordinatensystem sind fünf Gitterpunkte ausgewählt. Zeige, dass auf den Verbindungsstrecken der Punkte ein weiterer Gitterpunkt liegt.