

Aufgabenvorschläge (4) LSGM-Zirkel Kl.11/12, F.Rehm, 6.6.2020

die Lösungen könnt ihr mit Begründungen senden an: fr.rehm@gmail.com

Aufgabe 1:

Für die positiven Zahlen a, b betrachten wir die fünf Mittel-Größen:

- arithmetisches Mittel $AM(a, b) = (a+b)/2$
- geometrisches Mittel $GM(a, b) = \sqrt{ab}$
- harmonisches Mittel $HM(a, b) = 2/(1/a + 1/b)$
- quadratisches Mittel $QM(a, b) = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$
- kubisches Mittel $KM(a, b) = [(a^3 + b^3)/2]^{1/3}$

Gesuchte werden folgende ganzzahligen Zahlenpaare (a, b) mit $0 < b < a$ mit einem minimalen a -Wert:

- a) AM, HM, GM sind ganzzahlig
- b) AM, HM, QM sind ganzzahlig
- c) wie a), aber a und b sind teilerfremd
- d) wie b), aber a und b sind teilerfremd
- e) KM ist ganzzahlig
- f) AM, GM, QM sind ganzzahlig

Außerdem werden alle Zahlenpaare gesucht, für die g) oder h) gilt:

- g) $AM = GM + 1$; wann ist das AM erstmals prim > 1000 ?
- h) $AM + 1 = QM$; wann sind erstmals a, b und das QM prim > 1000 ?

Aufgabe 2:

Im Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seite $AB = c$ ist der Winkel $\angle ACB = 120^\circ$. Auf der Seite AB liegt ein Punkt D mit $DB = AC = b$. Der Winkel $\angle ACD$ beträgt 90° .

- a) man ermittle $b = AC$ in Abhängigkeit von c
- b) man ermittle das Seitenverhältnis $x = AD/b = (c-b)/b$

Aufgabe 3:

Für die nicht negativen Zahlen x, y, z gelte: $x + y + z = 3$. Man zeige die Ungleichung und ermittle, wann Gleichheit eintritt:

$$x^2 y^2 z^2 (1-x)(1-y)(1-z) \geq -1/16$$

Aufgabe 4:

		2		8			1
		8				4	5
	4	3			9		
			6			3	
1				2			6
	3				7		
			1			8	6
7	5					9	
3			4		6		