Korrespondenzzirkel der LSGM 2018/19

Klasse 7, 3.Treffen am 11.05.2019

6 Aufgaben zum Warmwerden vom Känguru 2010, Klasse 7/8

1. $12+23+34+45+56+67+78+89=404$
2. 20 Kaninchen, 8 Möhren. Wie oft müssen die Möhren gebrochen werden, damit jedes Kaninchen genau ein Stücke erhält? Wie oft muss man eine 4×6-Schokolade brechen, damit man 24 einzelne Stücke hat (Übereinanderlegen der Stücke vor dem Brechen ist nicht erlaubt)?
3. Umfangsberechnung
4. Für das Aneinanderschweißen von drei Rohren zu einem Rohr braucht man 18 Minuten. Wie viel Zeit braucht man für das Aneineanderschweißen von 6 Rohren zu einem Rohr? $45min$
5. Elly zeichnet die 6 Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks und verbindet einige davon zu einer geometrischen Figur. Diese Figur ist gewiss kein Trapez, spitzwinkliges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck, stumpfwinkliges Dreieck, Quadrat?
6. Was ist $2+4+6+\cdots+200-(1+3+5+\ldots\cdots+199)=$
7. Wenn $A:F:K=2:3:5$ und $F=125$, dann ist $A\approx 85$.
8. Winkelberechnung in einer ebenen Figur.
9. Verschlüsselte Nachricht von Margret.

Gaußsummen

Die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen berechnet sich so:

$$m+(m+1)+\cdots+n=\frac{m+n}{2}k,$$

dabei ist $k=n-m+1$ die Anzahl der Zahlen auf der linken Seite.

Insbesondere hat man mit $m = 1$, $k = n - 1 + 1 = n$ also

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1+n}{2} n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Diese Zahlen $d_n = n(n+1)/2$ heißen auch *Dreieckszahlen*. Die ersten Dreieckszahlen sind $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \cdots$.

Beispiel 1: Die Anzahl der Verbindungsstrecken von n Punkten (Kanten und Diagonalen) ist $d_{n-1} = n(n-1)/2$.

Beispiel 2: Die Anzahl der Möglichkeiten aus n Eissorten zwei verschiedene auszuwählen ist d_{n-1}.

Beispiel 3: Die Anzahl der Wege in einem rechteckigen Gitter von $(0,0)$ nach (m,n), wobei man nur immer einen Schritt nach Norden oder Osten gehen darf ist d_{m+n}.

Aus der Gaußsumme lässt sich eine Formel für t ableiten

$$t = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Setzt man $s = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + \cdots + n)$, so ist offenbar

$$t + s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n = \frac{1}{2} 2n(2n+1) = n(2n+1) = 2n^2 + n.$$

Außerdem ist $s = 2\frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1) = n^2 + n$. Also gilt

$$t = (s + t) - s = 2n^2 + n - (n^2 + n) = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2.$$

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2.

Variablen, Terme, Gleichungen

In Serie 6, Aufgabe 4, ging es um ein ebenes Dreieck mit Winkelhalbierende w_α und der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$. Es lassen sich zwei Beziehungen zwischen den Winkeln herleiten:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$
$$\frac{\alpha}{2} + 90^\circ = 2\beta.$$

Berechne β und γ aus α! Die zweite Beziehung erhält man aus dem Außenwinkelsatz im Dreieck ADE, die erste ist die Winkelsumme im Dreieck ABC.

Satz 1 *In einem Dreieck ist der Außenwinkel so groß wie die Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.*

Die binomischen Formeln

Aus den Distributivgesetzen $x(y+z) = xy + xz$ und $(x+y)z = xz + yz$ lassen sich die binomischen Formeln herleiten:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \quad \text{1. biniomische Formel,}\\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \quad \text{2. biniomische Formel,}\\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2, \quad \text{3. biniomische Formel.}
\end{aligned}
$$

Anwendung:

$$(a+1)^2(a-1) = (a^2 + 2a + 1)(a-1) = a^2 a - a^2 + 2a \cdot a - 2a + a - 1 = a^2 + a^2 - a - 1.$$

Vereinfache!

$$(2a-b) - (3a - 4(b-a)) - (2(a-b) - 2b) =$$

Offen gebliebene Aufgaben

Aufgabe 1: Für welche x gilt:

$$(2x-3)(2x+3) + (3x-2)^2 = 13x^2 - 11x.$$

Aufgabe 2: Für welche rationalen Zahlen x gilt $\frac{1}{1-x} < -2$?

Satz und Umkehrung

Ein Satz in der Form „Wenn p, dann q.“hat die Umkehrung „Wenn q, dann p.“Die Umkehrung eines gültigen Satzes muss nicht wahr sein.

Beispiel. Wenn $4 \mid n$, dann ist n gerade. Die Umkehrung gilt nicht.

Beispiel. Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann halbieren einander die Diagonalen. Die Umkehrung gilt.

Pause: SET, Ende: Inkies.