Korrespondenzzirkel der LSGM 2017/18

Klasse 6, 4.Treffen am 23.6.2018

10 Aufgaben zum Warmwerden vom Känguru 2006, Klasse 5/6

1. größte Zahl legen aus 6 Kärtchen mit 10 Ziffern
2. Wie alt sind die Zwillinge und ihre Mutter zusammen in 20 Jahren, wenn sie jetzt zusammen 60 Jahre sind?
3. Wie dick sind Comic und Lieblingsmathebuch, wenn beide zusammen 4 cm dick sind und 2 Mathebücher und 3 Comics zusammen 9 cm dick sind?
4. Weitere Aufgaben vom Känguru: 8, 9, 11, 12, 15, 18 …
5. Wenn das Produkt zweier natürlicher Zahlen gleich 72 ist, dann ist die Summe der beiden Zahlen gewiss nicht $73, 22, 27, 17$ oder 24?

Primzahlen

Georg wiederholt verschiedene gleichwertige Definitionen für Primzahlen: genau zwei Teiler, nur durch 1 und durch sich selbst teilbar, aber größer als 1. Wie viele Primzahlen von 1 bis 100 gibt es? Es sind genau 25.

Satz 1 Hauptsatz der multiplikativen Zahlentheorie *Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben. Zwei derartige Darstellungen unterscheiden sich höchstens in der Reihenfolge der Faktoren, nicht aber in der Anzahl in der jeder Primfaktor im Produkt auftritt.*

Beispiel.

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3^1,$$
$$72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Anzahl der Teiler einer Zahl

Wie kann man die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl bestimmen? Einfachster Weg: man schreibt alle Teiler der Größe nach auf. Ist etwa $T(n)$ die Menge der Teiler von n, dann sei $t(n)$ die Anzahl der Elemente von $T(n)$, also die Teileranzahl.

$$T(72) = \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\}, \quad t(72) = 12, \quad T(p) = \{1,p\}, \quad t(p) = 2,$$

wobei p eine beliebige Primzahl ist. Man erkennt auch $T(p^2) = \{1,p,p^2\}$, also $t(p^2) = 3$. Also, p^2 hat genau die 3 Teiler 1, p und p^2. Allgemein gilt $T(p^k) = \{1,p,p^2,\dots,p^k\}$, also $t(p^k) = k+1$; die $k$te Potenz einer Primzahl hat genau $k+1$ Teiler. Hieraus kann man sich die Formel für beliebige natürliche Zahlen ableiten:

$$T(72) = \{2^0,2^1,2^2,2^3\} \cdot \{3^0,3^1,3^2\}.$$

Jeder Teiler aus der ersten Klammer (Zweierpotenzen) kann mit jedem Teiler aus der zweiten Klammer (Dreierpotenzen) kombiniert werden. Also ist $t(72) = 4 \cdot 3 = 12$. Das gilt allgemein:

$$t(2^n 3^m) = (n+1)(m+1), t(2^n 3^m 5^k) = (n+1)(m+1)(k+1) \quad \text{usw.}$$

Aufgabe 1: Zeige: Eine natürliche Zahl ist genau dann eine Quadratzahl, wenn sie eine *ungerade* Anzahl von Teilern besitzt.

Pause: Rasende Roboter

Dreieckskonstruktionen

Konstruiere ein Dreieck aus den folgenden Stücken:

1. b, c, h_c,
2. b, s_c, α,

dabei sei h_c die Länge der Höhe von C und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von C zur Mitte der Gegenseite $\overline{AB}$.

Siegerehrung mit Urkunden
Rätsel: Inkies und Denksel-Rätsel