

Korrespondenzzirkel der LSGM 2017/18

Klasse 6, 2.Treffen am 10.3.2018

Aufgaben zum Warmwerden

1. $3^4 - 4^3 =$
2. Wie lange ist es von 22:54 Uhr bis 13:23 Uhr?
3. Welche der drei Zahlen ist durch 6 teilbar: 431, 726, 524?
4. Welchen Winkel schließen die Zeiger einer Uhr um 18:10 Uhr ein?
5. $\frac{1}{8} + \frac{3}{7} =$
6. Zwei Innenwinkel eines Dreiecks sind 30° und 130° groß. Wie groß ist der dritte Innenwinkel?
7. $1 + 2 + \dots + 20 =$
8. Die Punkte P, Q, R, S teilen die Seiten eines Quadrats A, B, C, D jeweils im Verhältnis 2: 1. Welchen Flächenanteil an $ABCD$ hat das Quadrat $PQRS$ am Quadrat $ABCD$?
9. Über den Seiten eines Quadrates $ABCD$ werden jeweils nach außen vier Quadrate $PQBA, RSCB, TUDC$ und $VWAD$ errichtet. Welchen Flächenanteil an der Gesamtfläche des Achtecks $PQRSTUUVW$ hat das überschlagene Sechseck $ABCSTCD$, bestehend aus dem Quadrat $ABCD$ und dem Dreieck CST ?

Gleichungen

Anhand der Olympiadaufgabe MO 570633 a) führen wir das Rechnen mit Gleichungen und Variablen ein:

Aufgabe 1 Ein rechteckiges Bild hat die Breite 6 und die Höhe h und soll flächengleich sein mit dem Flächeninhalt seines Rahmens. Der Rahmen hat überall eine Breite von 1. Wie groß ist h ?

Wenn der Rahmen denselben Flächeninhalt wie das Bild hat, so ist das äußere Rechteck (Bild und Rahmen zusammen) *doppelt* so groß wie die Fläche des Bildes: $F_{\text{außen}} = 2 \cdot F_{\text{Bild}}$. Die Kanten des Außenrechtecks sind durch den Rahmen jeweils um 2 größer als die Kanten des Bildes: $6 + 2$ und $h + 2$. Folglich gilt

$$F_{\text{außen}} = (6 + 2)(h + 2) = 2 \cdot F_{\text{Bild}} = 2 \cdot 6 \cdot h.$$

Also gilt $8(h+2) = 12h$. Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch 4, so hat man $2(h+2) = 3h$. Löst man links die Klammern auf, so hat man $2h+4 = 3h$. Subtrahiert man auf beiden Seiten $2h$, so bleibt $4 = h$. Das Bild hat also eine Höhe von 4.

Probe: $F_{Bild} = 6 \cdot h = 6 \cdot 4 = 24$, $F_{außen} = (6+2)(h+2) = 8 \cdot (4+2) = 48$. Damit hat der Rahmen die Fläche $48 - 24 = 24$ und ist genauso groß wie das Bild.

Aufgabe 2 Georg und Axel sind zusammen 71 Jahre alt. Vor 13 Jahren war Axel genau 8 Mal so alt wie Georg. Wie alt sind die beiden heute?

Es seien a und g die Altersangaben von Axel bzw. Georg heute. Dann gilt

$$a + g = 71, \quad a - 13 = 8 \cdot (g - 13).$$

Idee von Matti: Wir addieren zur zweiten Gleichung $g - 13$ und verwenden die erste Gleichung:

$$a - 13 + g - 13 = a + g - 26 = 71 - 26 = 45 = 9 \cdot (g - 13).$$

Division durch 9 liefert $g - 13 = 5$ bzw. $g = 18$ und folglich $a = 71 - 18 = 53$.

Pause: Rasende Roboter

Geometrische Konstruktionen und Kongruenzsätze

In diesem Abschnitt wiederholen wir, was eine *geometrische Konstruktion* im mathematischen Sinne ist: Es dürfen nur Zirkel und Lineal (ohne Zentimetereinteilung) verwendet werden, wobei das Lineal nur zum Verbinden von je zwei Punkten benutzt werden darf und der Zirkel nur zum Zeichnen eines Kreises um einen fixierten Mittelpunkt durch einen gegebenen Punkt auf der Kreislinie. Dies ist ausführlich zusammengefasst in den *Hinweisen zu geometrischen Konstruktionen*. Insbesondere kann man durch Lotfällen und Senkrechte errichten die Parallelverschiebung ohne Benutzung eines Geodreiecks durchführen.

http://lsgm.uni-leipzig.de/lsgm/KorrespondenzSeminar/2017/Geometrische_Konstruktionen.pdf

Wir wiederholen den Scheitelwinkelsatz, Satz über Stufenwinkel, Satz über Wechselwinkel und den Satz über entgegengesetztliegende Winkel an geschnittenen Parallelen.

Satz 1 (Entgegengesetztliegende Winkel) *Entgegengesetztliegende Winkel an geschnittenen Parallelen ergänzen sich zu 180° .*

Wir formulieren die *Umkehrungen* der drei Parallelensätze.

Satz 2 (Umkehrung des Stufenwinkelsatzes) *Sind die Stufenwinkel an zwei geschnittenen Geraden gleich groß, dann sind die Geraden zueinander parallel.*