

# Hinweise zu geometrischen Konstruktionen

Da in der Schule die Geometrie leider oft zu kurz kommt, hier ein paar Hinweise und prinzipielle Bemerkungen zu Konstruktionsaufgaben. Bei einer *geometrischen Konstruktion* (im mathematischen Sinne) hast du nur ein **Lineal** ohne Zentimetereinteilung und einen **Zirkel** zur Verfügung.

## Elementaroperationen

Jede Konstruktion besteht in der Hintereinanderausführung von folgenden Schritten in beliebiger Reihenfolge, den Elementaroperationen:

- das **Verbinden** zweier Punkte zu einer Geraden,
- das Zeichnen eines **Kreises** zu einem vorgegebenen Mittelpunkt und einem Punkt auf seiner Peripherie, der Kreislinie,
- das **Bestimmen der Schnittpunkte** zweier Geraden, zweier Kreise bzw. einer Geraden und eines Kreises.

Nur diese drei Operationen sind erlaubt. Selbst das Zeichendreieck ist entbehrlich. Versuch doch einmal, zu einer gegebenen Gerade eine Parallele durch einen gegebenen Punkt zu konstruieren — nur mit Zirkel und Lineal. Erst wenn du dich davon überzeugt hast, dass es klappt, darfst du das Dreieck zur Abkürzung dieser Parallelenkonstruktion wieder zu Hilfe nehmen. Für die Parallelenkonstruktion benötigst du zwei der folgenden vier Grundkonstruktionen, welche sind das?

## Grundkonstruktionen

Wiederhole bitte, wie die folgenden *Grundkonstruktionen* durchzuführen sind

1. Konstruktion der Mittelsenkrechten zu einer gegebenen Strecke  $\overline{AB}$ .
2. Fällen eines Lotes von einem Punkt  $P$  auf eine Gerade  $g$  ( $P$  liegt nicht auf  $g$ ).
3. Errichten einer Senkrechten auf eine Gerade  $g$  in einem Punkt  $P$  der Geraden.
4. Konstruktion der Winkelhalbierenden eines Winkels  $\angle(g, h)$ .

## Einfachste Dreieckskonstruktionen

Zu jedem der vier Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW, SsW gehört eine *einfache Dreiecks-konstruktion*.

1. **SSS:** Aus  $a, b, c$  lässt sich genau ein Dreieck  $ABC$  mit diesen Seitenlängen konstruieren, falls  $a + b > c$  und  $a + c > b$  und  $b + c > a$  (**Dreiecksungleichungen**).
2. **SWS:** Aus  $a, \gamma, b$  lässt sich stets genau ein Dreieck  $ABC$  konstruieren.
3. **WSW:** Aus  $\alpha, c, \beta$  lässt sich stets genau ein Dreieck  $ABC$  konstruieren, falls  $\alpha + \beta < 180^\circ$ .
4. **SsW:** Aus  $a, b, \alpha$  lässt sich stets genau ein Dreieck  $ABC$  konstruieren, falls  $a > b$ .

## Dreieckskonstruktionen

Ein Dreieck ist in der Regel durch **drei Stücke** eindeutig bestimmt. Mit Hilfe der obigen vier Kongruenzsätze und den Grundkonstruktionen lassen sich schon viele einfache Dreiecks-konstruktionen bewerkstelligen, wie etwa  $(a, s_a, b)$ ,  $(a, h_a, b)$ ,  $(h_a, s_a, a)$  und viele andere mehr. Dabei bezeichnen  $h_a$  und  $s_a$  die Höhe bzw. die Seitenhalbierende von  $\overline{BC}$ , die von  $A$  ausgeht.

## Vorgehen bei Konstruktionen

Die Schritte, die im Grunde bei jeder Konstruktionsaufgabe durchzuführen sind lauten:

1. Skizze
2. Analyse
3. Konstruktion
4. Konstruktionsbeschreibung (nicht auf der Rückseite des Blattes!)
5. Beweis
6. Determination

Die Nützlichkeit einer *Skizze* sieht wohl jeder ein. Sie sollte stets genügend groß und allgemein sein (ein allgemeines Dreieck sollte also nicht gleichschenkelig oder rechtwinklig skizziert werden). Die *Analyse* ist der wichtigste Schritt einer Konstruktion. Hier werden wichtige Hilfslinien in die Skizze aufgenommen, wesentliche Beziehungen zwischen den

einzelnen gegebenen Stücken werden abgeleitet und notiert. Konstruierbare Teilfiguren werden erkannt. Alle gedanklich notwendigen Schritte zur Konstruktion muss die Analyse liefern.

Was in der *Konstruktion* geschieht ist allen klar. Die *Konstruktionsbeschreibung* soll alle in der Konstruktion durchgeführten Schritte in ihrer zeitlichen Reihenfolge beschreiben. Wichtig ist die Bezeichnung aller Hilfspunkte. Es sollten nur Grundkonstruktionen vorkommen (Schnittpunkte von Kreisen und Geraden bestimmen, Senkrechte in  $A$  auf  $g$  errichten, das Lot von  $A$  auf  $g$  fällen, die Parallele zu  $g$  durch  $A$  zeichnen, den Mittelpunkt einer Strecke bestimmen).

Im *Beweis* sollte man kurz begründen, warum die so konstruierte Figur tatsächlich den Anforderungen der Aufgabe genügt. Der Beweis stellt praktisch die Umkehrung der Analyse dar. Bei der Analyse muss man von der schon konstruierten Figur ausgehen und Fakten ableiten, beim Beweis soll man sich an die eigene Konstruktion halten und zeigen, dass diese korrekt ist.

In der *Determination*, auch Diskussion genannt, soll untersucht werden, ob die Konstruktion stets ausführbar ist und ob die konstruierte Figur bis auf Bewegungen eindeutig ist.