Korrespondenzzirkel der LSGM 2016/17

Klasse 8, 4.Treffen am 13.5.2017

Aufgaben zum Warmwerden

1. Wie viele Sprünge müssen 8 Kängurus im 4×4-Feld machen, damit in jeder Zeile und Spalte genau 2 Kängurus sind?

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

2. Jeder Junge isst doppelt so viele Eiskugeln wie jedes Mädchen. 3 Jungen und 2 Mädchen essen 16 Kugeln. Wie viele Kugeln essen 2 Jungen und 3 Mädchen?

3. Wie lange dauert ein Drittel von einem Viertel von einem halben Tag?

4. Jeder Zweite an unserer Schule ha ein Fahrrad und jeder vierte Fahrradbesitzer hat außerdem noch Rollerblades. Wieviel Prozent aller Schüler unserer Schule haben beides?

5. Spinne auf Würfel, Weglänge.

6. Zimmerfläche aus Seitenlängen bestimmen.

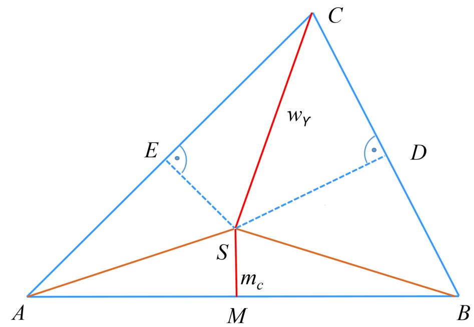
7. Welche Zahl ist die größte?

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}:\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}:\frac{1}{2}.$$

8. Mein Bruder Hänschen schneidet ein Stück Papier in 10 Teile. Dann nimmt er das größte Stück und zerschneidet es erneut in 10 Teile. Dies tut er noch weitere drei Male. Ich muss dann aufräumen. Wie viele Papierstücken aus Hänschens Zerschneideaktion muss ich einsammeln?

Jedes Dreieck ist gleichschenklig

In diesem Abschnitt behandeln wir zwei „Scheinbeweise“, die beide zeigen, dass in einem beliebigen Dreieck ABC die Seitenlängen a und b gleich groß sind.

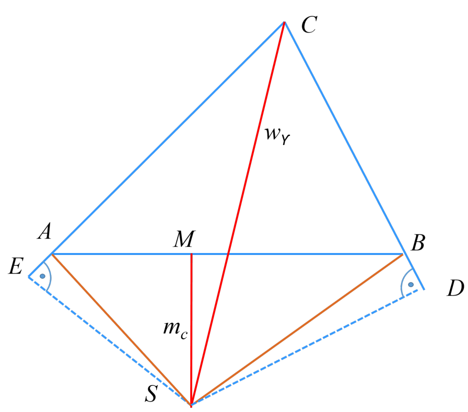


In der nebenstehenden Figur wurde in rot die Winkelhalbierende w_γ und die Mittelsenkrechte m_c von $\overline{AB}$ eingezeichnet. Ihr Schnittpunkt sei S. Von S aus wurden die Lote auf die Dreiecksseiten BC und AC gefällt; deren Lotfußpunkte seien D bzw E. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

Zunächst gilt $\triangle SDC \cong \triangle SEC$ nach dem Kongruenzsatz SsW, denn die beiden Dreiecke stimmen in der größten Seite $\overline{CS}$ und dem Winkel der der größten Seite gegenüber liegt, dem recten Winkel, überein, und es gilt $\overline{SE} = \overline{SD}$. Dies folgt aus der definierenden Eigenschaft der Winkelhalbierenden: Ihre Punkte haben von den beiden Schenkeln des Winkels denselben Abstand. Folglich gilt $\overline{CE} = \overline{CD}$.
Ferner sind auch die Dreiecke $\triangle ASE$ und $\triangle BSD$ kongruent nach SsW, denn auch sie stimmen im rechten Winkel bei E bzw bei D, der Hypothenuse $\overline{SA} = \overline{SB}$ und einer Kathete überein, $\overline{SE} = \overline{SD}$. Damit gilt also $\overline{AE} = \overline{BD}$.
Addiert man diese beiden Streckenabschnitte, so erhält man

$$b = \overline{AC} = \overline{CE} + \overline{EA} = \overline{CD} + \overline{DB} = a.$$

Wer eine gute Skizze macht, erkennt sofort, dass bei dem obigen Bild etwas nicht stimmt: der Schnittpunkt S liegt nämlich *immer* außerhalb des Dreiecks ABC.



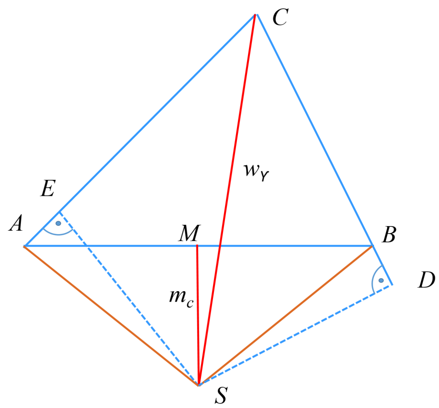
In dieser Figur (links) kann man aber ganz genauso wie oben zeigen, dass

$$\triangle SDC \cong \triangle SEC \quad \text{und} \quad \triangle ASE \cong \triangle BSD.$$

Wie oben folgt nun durch *Differenzbildung*

$$b = \overline{AC} = \overline{CE} - \overline{EA} = \overline{CD} - \overline{DB} = \overline{BC} = a.$$

Wer eine *sehr gute* Skizze macht, erkennt, dass auch bei dieser guten Skizze etwas nicht stimmt, denn die Lotfußpunkte D und E liegen stets einmal *innerhalb* der Dreiecksseite und einmal *außerhalb*.



Auch in dieser Figur kann man genauso wie oben zeigen, dass

$$\triangle SDC \cong \triangle SEC \quad \text{und} \quad \triangle ASE \cong \triangle BSD.$$

Der Schluss auf $a = b$ lässt sich nun aber nicht ziehen, da einerseits $b = \overline{AC} = \overline{CE} - \overline{EA}$ und andererseits $a = \overline{BC} = \overline{CD} + \overline{DB}$.

Hier steckt ein ganz bekannter Satz aus der Dreiecksgeometrie dahinter, der Südpolsatz.

Satz 1 (Südpolsatz) *In jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierende von γ und die Mittelsenkrechte von c auf dem Umkreis.*

Wir haben den Südpolsatz mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes bewiesen und zwei weitere äquivalente Formulierungen des Südpolsatzes angegeben.

Pause: Rasende Roboter.

Kombinatorik

Aus n verschiedenen Sorten werden k Teile ausgesucht. Bei Kombinationen kommt es nur auf die Auswahl an, bei Variationen auch auf die Reihenfolge der Auswahl. Wir wiederholen die Begriffe und die zugehörigen Formeln für deren Anzahlen:

Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung = $\binom{n}{k}$.
Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung = $\binom{n+k-1}{k}$.
Anzahl der Variationen ohne Wiederholung = $k! \cdot \binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$
Anzahl der Variationen mit Wiederholung = n^k.

Dabei nennt man $\binom{n}{k}$, sprich „n über k“, den Binomialkoeffizienten. Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}.$$

Einfachste Eigenschaften

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$.
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$.
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus n verschiedenen Gegenständen genau zwei auszuwählen.

- (Pascalsches Dreieck) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Abzählen der kürzesten Wege in einem Stadtplan

Wie viele kürzeste Wege (der Länge 5) gibt es im untenstehenden Stadtplan von A nach B, wobei nur nach Norden bzw. Osten gezogen werden kann und nur entlang der waagerechten und senkrechten Linien.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Jeder kürzeste Weg lässt sich in dieser Form darstellen (O, O, O, N, N) oder (N, O, N, O, O), dabei bedeutet der Buchstabe O bzw. N an der $k$ten Stelle $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$, dass in diesen Schritt nach Osten bzw. nach Norden gegangen wird. Nach dem Skript `http://lsgm.uni-leipzig.de/lsgm/KorrespondenzSeminar/2014/treff1.pdf` bzw. „Beiblatt zur Kombinatorik, Klasse 8“, Anordnungsprobleme, rechte Spalte, berechnet sich die Anzahl dieser geordneten 5-Tupel aus zwei N und drei O über $5!/(3!2!) = \binom{5}{2} = 10$.

Siegerehrung

Alle Teilnehmer bekommen eine Urkunde für Teilnahme am Korrespondenzzirkel, Klasse 8. Samuel Dürrschmidt und Nikolaus Metzner werden für sehr gute Teilnahme mit jeweils einem Buchpreis ausgezeichnet.