Korrespondenzzirkel der LSGM 2016/17

Klasse 8, 3.Treffen am 8.4.2017

Aufgaben zum Warmwerden

1. $2004 \cdot 200 + 40$.
2. Das gleichseitige Dreieck ACD wir entgegen dem Uhrzeigersinn um den Punkt A gedreht. Um welchen Winkel ist es gedreht worden, wenn es zum ersten Mal das Dreieck ABC überdeckt (B ist der Spieglungspunkt von D an AC).
3. Wie groß ist x?
$$\left(x \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 + 1 = 50.$$
4. Wenn die Brötchen 1,2 Mal so viel kosten, dann wurde der Preis um wieviel Prozent erhöht?
5. 4×4 latin square
6. Würfelnetz mit Schnittfigur
7. Beim Wandertag kommt unsere Klasse an einem Eisstand vorbei. Unser Mathelehrer sieht unseren Appetit und sagt zur Eisverkäuferin, korrekt wie stets:„Wie ich sehe, haben Sie 8 Eissorten. Bitte füllen Sie auf meine Rechnung Eistüten mit je 2 unterschiedlichen Sorten Eis und geben Sie allen Schülerinnen und Schülern je eine solche, wobei keine 2 Kinder gleiche Tüten erhalten sollen.“ Die Verkäuferin schmunzelt, mustert uns und meint:„Ich täte dies gern, jedoch ist genau einer zu viel in der Klasse, um Ihren Wunsch nach lauter verschiedenen Tüten erfüllen zu können.“ Wie viele sind wir in der Klasse?
8. Im Heft meines Banknachbarn lese ich die Aufgabe:„Zeichne ein Dreiec ABC bei dem für die Größe der Winkel α, β und γ gilt: $\alpha = 36°$, $\beta = 98°$ und $\gamma = 36°$. Was trifft zu?
9. 11 Felder nebeneinander: die Sieben in Feld 1 und die Sechs in Feld 9. Welche Zahl muss im Feld 2 stehen, damit die Summe je deier aufeinanderfolgender Felderzahlen 21 ist.
10. Durchmesser eines Kreises.

Dreieckszahlen

Wir wiederholen die Definition der Dreieckszahlen als figurierte Zahlen (Abzählen von Punkten in einem Dreiecksgitter der Länge n). Wir wiederholen

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus n verschiedenen Gegenständen genau zwei auszuwählen.
- Gauß-Geschichte: $1+2+\cdots+100 = 5050$ und $1+2+\cdots+n = \binom{n+1}{2}$.
- Der vollständige n-Graph K_n hat genau $\binom{n}{2}$ Kanten und $n(n-3)/2$ Diagonalen.

Lineare Funktionen

Wir wiederholen Anstieg m und Absolutglied n bei $y = f(x) = mx + n$, Nullstelle $x_0 = -n/m$ und Anstieg einer senkrechten Geraden ist $m' = -1/m$. Sind zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ des Graphen einer linearen Funktion $y = mx + n$ gegeben, so erhält man den Anstieg m über das *Anstiegsdreieck*:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

Die 2-Punkte-Form der Geradengleichung

Wenn man zwei Punkte einer linearen Funktion kennt, so ist die Funktion eindeutig bestimmt. Wählt man einen dritten *variablen* Punkt $P(x, y)$ auf dem Graphen der Funktion, so kann man den Anstig m aus drei verschiedenen Anstiegsdreiecken bestimmen: über P_1, P_2 oder P_1, P oder P_2, P. Es gilt also

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y}{x_2 - x}.$$

Man bezeichnet

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

als die *2-Punkte-Form* der Geradengleichung. Mit zwei Umformungen, Multiplikation mit $(x - x_1)$ und Addition von y_1, lässt sich diese Gleichung schnell in die Gestalt $y = mx + n$ bringen.

Betragsfunktion, Gaußklammer und Signumfunktion

Anhand der Funktion $f(x) = 4 - |x-3|$ erläutern wir die grafische Darstellung von Funktionen:

$|x| \quad \Rightarrow \quad |x-3|$ ist eine Verschiebung von $|x|$ um 3 in Richtung der positiven x-Achse.
$|x-3| \quad \Rightarrow \quad -|x-3|$ ist eine Spiegelung von $|x-3|$ an der x-Achse.
$-|x-3| \quad \Rightarrow \quad 4-|x-3|$ ist eine Verschiebung von $-|x-3|$ um 4 in Richtung der positiven y-Achse.

Aus der graphischen Darstellung folgt, dass die Ungleichung $4-|x-3| \geq |x|+2$ keine Lösung hat. Dagegen hat die Ungleichung $4-|x-3| \geq |x|-2$ ein endliches Intervall als Lösung, das sich aus den beiden Schnittpunkten der Graphen von $f(x) = 4-|x-3|$ und $g(x) = |x|+2$ ergibt.

Aufgabe 1 Welche rationalen Lösungen $x \in \mathbb{Q}$ hat die Gleichung $[2x+5] = [3x-4]$?

Dabei sei $[x]$ die in Serie 6.1 benannte *Treppenfunktion*: $[x]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 2 Es sei $0 < a < 1$ eine rationale Zahl. Wie viele rationale Lösungen x hat die Gleichung

$$[x] = ax?$$

Gib zu jedem a diese Lösungen an.

Wir hatten behandelt:

- $a = 0,9$ hat 9 Lösungen: je eine im Intervall $[n, n+1)$ für $n = 0, 1, \ldots, 8$. Für $x \geq 9$ kann es keine Lösungen mehr geben. Warum nicht?
- $a = \frac{1}{2}$ es gibt nur $x = 0$ als Lösung.
- $a = 2/3$: es gibt genau zwei Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3/2$.