Korrespondenzzirkel der LSGM 2016/17

Klasse 8, 2.Treffen am 11.3.2017

Aufgaben zum Warmwerden

Satzgruppe des Pythagoras

Wir wiederholen Ähnlichkeit und Pythagoras, Höhensatz und Kathetensatz und lösen mit Hilfe dieser Formeln die Aufgabe Serie 5.3 durch Termumformungen.

Satz 1 (Satz des Pythagoras) *Sind a und b die Seitenlängen der beiden kürzeren Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck und c die Länge der längsten Seite, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.*

Die beiden kürzeren Seiten schließen den rechten Winkel ein und heißen **Katheten**, und die längste Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypothenuse**.

Satz 2 (Höhensatz) *Sind p und q die an den Katheten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ anliegenden Hypothenusenabschnitte $p+q=c$, $q=|\overline{AD}|$, $p=|\overline{DB}|$, D ist Höhenfußpunkt von C auf AB und $h=|\overline{CD}|$ die Länge der Höhe. Dann gilt $h^2 = pq$.*

Satz 3 (Kathetensätze) *Mit den Bezeichnungen des vorigen Satzes gilt:*

$$b^2 = qc \quad \textit{und} \quad a^2 = pc.$$

Pause: Rasende Roboter.

Rechnen mit Kongruenzen

Motivation

Mittels Kongruenzrechnung lassen sich viele zahlentheoretische Aufgaben elegant und einfach lösen. Wir lösen diese Aufgaben:

1. Zeige, dass es keine natürlichen Zahlen a und b gibt mit $2^a - 3^b = 41$.
2. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $44 \mid 43^{2n+1} + 87^{2m}$
3. Wie lautet die letzte Ziffer von f_{2017}, wenn $(f_n) = (1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots)$ die Fibonacci-Folge ist?
4. Drei natürliche Zahlen (a,b,c) bilden ein pythagoräisches Tripel, wenn $a^2 + b^2 = c^2$. Die beiden kleinsten Tripel sind $(3,4,5)$ und $(4,12,13)$. Zeige, dass stets gilt $60 \mid abc$.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Wiederholung. Im Folgenden ist m stets eine natürliche Zahl, $m \geq 1$.

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo m*, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a-b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q \in \mathbb{Z}\colon\ a = qm + b$. (Lies:„Es existiert eine ganze Zahl q mit $a = qm + b$.“)

Wir schreiben $a \equiv b \pmod{m}$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m“.

Spezielle Lösungen für lineare diophantische Gleichungen

Eine lineare diophantische Gleichung $ax + by = c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}$ ist genau dann lösbar, wenn $\operatorname{ggT}(a, b) \mid c$. Gilt sogar $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$, dann lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bt, \\ y &= y_0 - at, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

wobei (x_0, y_0) eine spezielle (beliebige) Lösung der Gleichung ist. Diese spezielle Lösung kann man mittels Kongruenzrechung schnell ermitteln. Dieses Verfahren ist schneller als die Eulersche Reduktionsmethode oder die ggt-Methode.
Sei a der betragsmäßig kleinste Koeffizient der Gleichung. Wir betrachten die Gleichung modulo a und erhalten eine lineare Kongruenz in y, die sich leicht lösen lässt.

Beispiel 1 (Serie 5, Aufgabe 1) Finde eine spezielle Lösung $x, y \in \mathbb{Z}$ von $17x + 23y = 676$.

Lösung: Wir betrachte diese Gleichung modulo 17. Wegen $23 \equiv 6 \pmod{17}$ und $676 \equiv 13 \pmod{17}$ gilt

$$17x + 23y \equiv 0x + 6y \equiv 6y \equiv 13 \equiv 13 + 17 \equiv 30 \pmod{17}.$$

Division durch 6 liefert $y \equiv 5 \pmod{17}$ bzw. $y = 5 + 17s,\ s \in \mathbb{Z}$. Also ist $y_0 = 5$ eine spezielle Lösung. Man findet dazu durch Einsetzen $x_0 = 33$.

Periodizität der Fibonacci-Folge modulo m

Wir betrachten die Fibonacci-Folge (f_n) bezüglich eines beliebigen Moduls m. Es ist klar, dass die Folgenglieder f_n nur m verschieden Werte $0, 1, \ldots, m-1$ von Resten modulo m annehmen können. Für zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder (f_k, f_{k+1}) gibt es also nur m^2 verschieden Paare von Resten. Betrachtet man nun die $m^2 + 1$ aufeinanderfolgenden Paare von Fibonacci-Resten $(f_1, f_2), (f_2, f_3), \ldots, (f_{m^2+1}, f_{m^2+2})$, dann müssen nach Dirichletschem Schubfachprinzip mindestens zwei dieser Paare übereinstimmen. Wegen der Rekursionsformel stimmen dann auch die beiden Nachfolgepaare überein usw. Damit wird die Restefolge periodisch.

Beispiel 2 $m = 10$. Unter den ersten $10 \cdot 10 + 1 = 101$ aufeinanderfolgenden Fibonacci-Paaren gibt es zwei, die dieselben Einerziffern haben.

$$(0,1,1,2,3,5,8,3,1,4,\quad 5,9,4,3,7,0,7,7,4,1,\quad 5,6,1,7,8,5,3,8,1,9,\quad 0,9,9,8,7,5,2,7,9,6,$$
$$5,1,6,7,3,0,3,3,6,9,\quad 5,4,9,3,2,5,7,2,9,1,\quad 0,1,\dots)$$

Also gilt $f_{61} \equiv f_1 \pmod{10}$ und $f_{62} \equiv f_2 \pmod{10}$ also $f_{60+n} \equiv f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erkennt auch, dass durchaus *nicht alle Paare* (a, b) von Resten modulo 10 vorkommen, sondern eben nur 60 Paare. Es gibt kein Paar aufeinanderfolgender *gerader* Endziffern. Warum?

Periodizität der Potenzreste. $2^a - 3^b = 41$**.**

Man erkennt zunächst, dass $a \geq 6$, da erst $64 > 41$. Wir betrachten die obige Gleichung modulo 4 und modulo 8.
modulo 4. Wegen $3 \equiv -1 \pmod 4$ hat man $-(-1)^b \equiv 1 \pmod 4$. Also ist b ungerade.
modulo 8. Wir untersuchen die Potenzreste 3^b moduol 8 und erhalten

$$3^0 \equiv 1 \pmod 8, \quad 3^1 \equiv 3 \pmod 8, \quad 3^2 \equiv 1 \pmod 8.$$

Also gilt für ungerades b stets $3^b \equiv 3 \pmod 8$ und damit lautet die Gleichung

$$2^a - 3^b \equiv 0 - 3 \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow -3 \equiv 1 \pmod 8.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also hat die Gleichung $2^a - 3^b = 41$ keine ganzzahlige Lösung.

Beweis von $60 \mid abc$ **für pythagoräische Tripel**

Wir betrachten zunächst nur die pythagoräischen Grundtripel (siehe Serie 4, Aufgabe 2), also die positiven ganzzahligen Tripel (a, b, c), die einen größten gemeinsamen Teiler gleich 1 haben und $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Jedes derartige Tripel ist von der Gestalt

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2, \quad u, v \in \mathbb{N}, u \not\equiv v \pmod 2.$$

Die ersten Grundtripel $(3,4,5)$, $(5,12,13)$ und $(15,8,17)$ erhält man für $(u, v) \in \{(2,1), (3,2), (4,1)\}$.

Wegen $60 = 4 \cdot 3 \cdot 5$ müssen wir zeigen, dass abc sowohl durch 3, durch 4 als auch durch 5 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 4. Dies folgt sofort aus $4|a$, denn $a = 2uv$ und u oder v ist gerade.

Teilbarkeit durch 3. Fall 1: $uv \equiv 0 \pmod 3$. Dann ist a durch 3 teilbar und somit auch abc.
Fall 2. $u \equiv \pm 1 \pmod 3$ und $v \equiv \pm 1 \pmod 3$. Dann gilt

$$u^2 \equiv v^2 \equiv 1 \pmod 3 \quad \Longrightarrow \quad 3 \mid b = u^2 - v^2.$$

Teilbarkeit durch 5. Fall 1. $uv \equiv 0 \pmod 5$. Dann ist a durch 5 teilbar und somit auch abc.

Fall 2. $u, v \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod 5$. Dann gilt $u^2, v^2 \equiv 1, 4 \pmod 5$ und weiter $u^4 \equiv v^4 \equiv 1 \pmod 5$. Folglich gilt

$$5 \mid (u^4 - v^4) = (u^2 + v^2)(u^2 - v^2) = bc.$$

Folglich gilt $60 \mid abc$ für alle Grundtripel.