Korrespondenzzirkel der LSGM 2016/17

Klasse 8, 1.Treffen am 5.11. 2016

Aufgaben zum Warmwerden

Dreieckszahlen

Definition 1 Unterteilt man die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks der Länge $n-1$ jeweils durch n Punkte (einschließlich der Endpunkte) in $n-1$ kongruente Strecken der Länge 1 und zeichnet nun alle $(n-1)^2$ gleichseitigen Dreiecke der Seitenlänge 1 gitterartig ein, so hat dieses Dreiecksgitter genau $a_n = n(n+1)/2$ Eckpunkte. Diese Zahl ist ein Binomialkoeffizient $a_n = \binom{n+1}{2}$ und wird als n**te Dreieckszahl** bezeichnet

Es ist also $a_n = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots)$.

Aufgabe 1 a) In wie viele Teile kann die Ebene durch 4, 5 bzw. 6 Geraden maximal zerlegt werden ?

b) Gib eine Rekursion an, wie man von der maximalen Zerlegungszahl b_n durch n Geraden auf eine maximale Zerlegungsanzahl b_{n+1} durch $n+1$ Geraden kommt.

c) Wie lautet die explizite Formel für die maximale Anzahl b_n der Zerlegung durch n Geraden, also eine Formel, die nur noch von n abhängt und nicht von b_{n-1}?

d) Wie viele der b_n Teile haben unendliche Ausdehnung?

Aufgabe 2 Gegeben seien n Punkte in der Ebene. Wie viele Strecken gibt es, die diese Punkte als Endpunkte haben?

Rechnen mit Kongruenzen

Motivation

Mittels Kongruenzrechnung lassen sich viele zahlentheoretische Aufgaben elegant und einfach lösen.

1. Diophantische Gleichungen (Gleichungen, wo die gesuchten Variablen *ganze* Zahlen sind), wie $15x+3y = 100$ oder $24x+36y = 3334$ oder $x^2 = 8y+7$ oder $x^2+y^2+z^2 = 8u+7$. Zeige, dass die folgenden Gleichungen keine ganzzahligen Lösungen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ haben: a) $96x + 144y + 72z = 10002$ bzw. b) $x^2 + y^2 + z^2 = 99999$.

2. Teilbarkeitsregeln $n \equiv Q(n) \pmod 9$, $n \equiv A(n) \pmod{11}$.
3. Auf welche beiden Ziffern endet $7^{7^{7^7}}$?
4. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $44 \mid 43^{2n+1} + 87^{2m}$
5. Wie lautet die letzte Ziffer von f_{2014}, wenn $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ die Fibonacci-Folge ist?
6. Drei natürliche Zahlen (a, b, c) bilden ein pythagoräisches Tripel, wenn $a^2 + b^2 = c^2$. Die beiden kleinsten Tripel sind $(3, 4, 5)$ und $(4, 12, 13)$. Zeige, dass stets gilt $60 \mid abc$.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Wiederholung. Im Folgenden ist m stets eine natürliche Zahl, $m \geq 1$.

Definition 2 Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo m*, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a - b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q \in \mathbb{Z}\colon\ a = qm + b$. (Lies:„Es existiert eine ganze Zahl q mit $a = qm + b$.“)

Wir schreiben $a \equiv b \pmod m$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m“.

Teilbarkeitsregeln:

Satz 1 *Für alle natürlichen Zahlen n mit der Quersumme $Q(n)$ und der alternierenden Quersumme $A(n)$ gilt:*

$$n \equiv Q(n) \pmod 9 \quad \textit{und} \quad n \equiv Q(n) \pmod 3$$
$$n \equiv A(n) \pmod{11},$$

dabei ist z.B. die alternierende Quersumme der 4-stelligen Dezimalzahl $n = [abcd]_{10} = 1000a + 100b + 10c + d$ gleich $A(n) = d - c + b - a$ und die Quersumme $Q(n) = d + c + b + a$.

Beispiele:

$$12345 \equiv 54321 \pmod 3, \quad 91 \equiv 35 \pmod 7, \quad 123456 \equiv 6 \pmod{10}, \quad 123456 \equiv 56 \pmod{100},$$
$$2010 \equiv -3 \pmod{11}, \quad 2011 \equiv 1 \pmod 3.$$

$$A(12345) = 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3 \Longrightarrow 12345 \equiv 3 \pmod{11}$$
$$Q(12345) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \Longrightarrow 12345 \equiv 15 \equiv 6 \pmod 9.$$

Spezialfälle: $m = 10$ und $m = 100$. Zwei (natürliche) Dezimalzahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie auf dieselbe Ziffer enden. Zwei Dezimalzahlen sind kongruent modulo 100, wenn ihre letzten beiden Ziffern übereinstimmen.

Pause: Rasende Roboter.

Satz des Pythagoras

In Serie 3, Aufgabe 1, wird der Satz jdes Pythagoras benötigt:

Satz 2 (Satz des Pythagoras) *Sind a und b die Seitenlängen der beiden kürzeren Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck und c die Länge der längsten Seite, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.*

Die beiden kürzeren Seiten schließen den rechten Winkel ein und heißen **Katheten**, und die längste Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypothenuse**.

Aufgabe 3 Gegeben sei ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit Kathethenlänge $a = b$. Wie lang ist die Hypothenuse c?

Lösung: Nach dem Satz des Pythagoras ist $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Zieht man die Wurzel, so hat man $c = a\sqrt{2}$.

Aufgabe 4 In einem Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge a seien P und Q die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$. Bestimme den Umfang des Dreiecks APQ in Abhängigkeit von a

Lösung: $u = a/2(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$.

Periodizität der Potenzreste

Betrachtet man die Potenzen a^n für eine natürliche Zahl a und $n = 0, 1, 2, \ldots$ modulo einer festen natürlichen Zahl m, dann können höchstens die m Reste $0, 1, \ldots, m-1$ auftreten. Spätestens bei $n = m$ muss also nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip ein Rest doppelt aufgetreten sein. Vom ersten Wiederauftreten eines Restes an treten alle folgenden Reste periodisch auf.

Beispiel: Wie lautet die letzte Ziffer von 2^n? Wir betrachten also die Potenzreste 2^n modulo 10:

$$\begin{aligned}
2^0 &\equiv 1 \pmod{10} \\
2^1 &\equiv 2 \pmod{10} \\
2^2 &\equiv 4 \pmod{10} \\
2^3 &\equiv 8 \pmod{10} \\
2^4 &\equiv 16 \equiv 6 \pmod{10} \\
2^5 &\equiv 6 \cdot 2 \equiv 12 \equiv 2 \pmod{10}
\end{aligned}$$

Also ist die Periodenlänge von $2^n \pmod{10}$ gleich 4. Fazit

$$2^{4n} \equiv 6, \quad 2^{4n+1} \equiv 2, \quad 2^{4n+2} \equiv 4, \quad 2^{4n+3} \equiv 8 \pmod{10}.$$

Auf welche Ziffern enden 2^{999}, 2^{2017}?

Aufgabe 5 Welchen Rest lässt 3^{147} bei Division durch 7?

Aufgabe 6 Es sei $z = 1234567891011121314 15 \cdots 201420151016$ diejenige natürliche Zahl, die man durch Aneinanderreihung aller natürlicher Zahlen von 1 bis 2016 erhält. $Q(n)$ bezeichne die Quersumme einer natürlichen Zahl n. Berechne $Q(Q(Q(z)))$.