

Skript zum ersten Zirkeltreffen

29. April 2017

Wege geschickt zählen

Beantworte die folgenden drei Fragen:

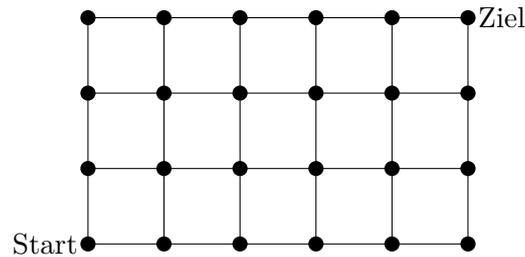
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus fünf Eissorten ein Eis mit zwei verschiedenen Kugeln zusammenzustellen?
- Wie viele Verbindungen gibt es zwischen fünf Punkten, die so angeordnet sind, dass keine drei auf einer gemeinsamen Linie liegen?
- Wie viele kürzeste Wege von „Start“ nach „Ziel“ gibt es im folgenden Plan?

In allen drei Fällen ist die Antwort 10. Das ist kein Zufall, denn in jedem Fall handelt es sich um die Anzahl der Möglichkeiten, aus fünf Dingen zwei auszuwählen:

- Bei den Eissorten ist dies klar.
- Bei den Punkten hat jede Verbindungslinie zwei Endpunkte. Deshalb wählt jede Linie zwei der fünf Punkte aus.
- Bei den kürzesten Wegen hat man an jeder Kreuzung die Möglichkeit, nach Norden oder nach Osten zu gehen (denn Wege nach Süden und Westen sind hier immer Umwege). Um vom Start zum Ziel zu kommen, muss man insgesamt fünf „Schritte“ machen und dabei zweimal nach Norden gehen. Man sucht also von den fünf Schritten zwei aus, bei denen man nach Norden geht.

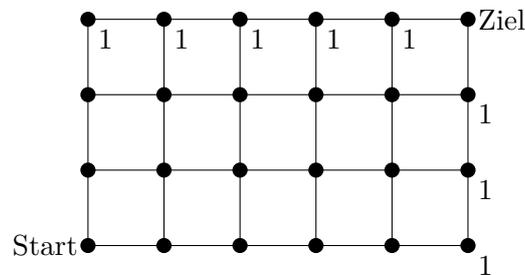
Wir wollen nun eine Möglichkeit kennenlernen, das letzte Problem geschickt zu lösen, selbst wenn es recht viele Wege gibt. Durch Zeichnen geeigneter Pläne kann man dann auch Varianten der ersten beide Fragen beantworten. Dazu sehen wir uns folgenden

größeren Plan an:

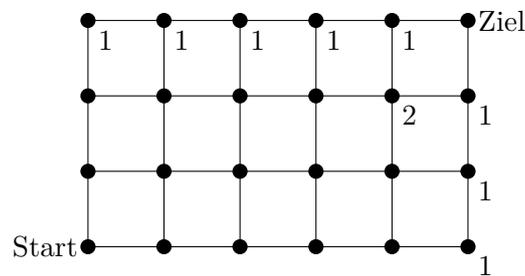


Beim Wegezählen ist es hilfreich, vom Ziel aus anzufangen. Wir schreiben an jeden Punkt, wie viele kürzeste Wege es von diesem Punkt bis zum Ziel gibt. Wenn wir an den Startpunkt eine Zahl geschrieben haben, wissen wir dann, wie viele kürzeste Wege es vom Start zum Ziel gibt.

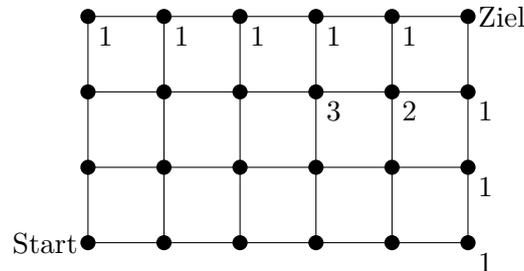
Wenn man sich an einem Punkt befindet, der sich beliebig viele Schritte direkt südlich des Ziels befindet, kann man nur noch nach Norden gehen, denn jede andere Richtung ist dann ein Umweg. Ebenso ist es bei Punkten direkt westlich vom Ziel. Daher schreiben wir an diese Punkte jeweils eine 1.



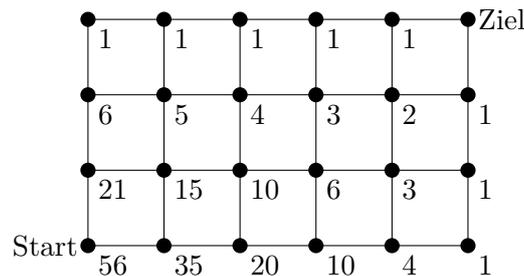
Betrachte nun den Punkt, der einen Schritt westlich und südlich vom Ziel ist. Wir wissen natürlich, dass es von dort zwei kürzeste Wege zum Ziel gibt, aber wir können es auch auf folgende Art ausrechnen: Damit ein Weg möglichst kurz bleibt, muss er nach Norden oder Osten führen, denn ein Schritt nach Westen oder Süden ist sicherlich ein Umweg. Wenn man einen Schritt nach Norden macht, hat man danach nur noch eine Möglichkeit – das ist ja gerade, was die 1 am nördlichen Punkt bedeutet. Ebenso hat man nur noch eine Möglichkeit, nachdem man einen Schritt nach Osten gemacht hat, das sagt uns die 1 am östlichen Punkt. Insgesamt gibt es von diesem Punkt also $1 + 1 = 2$ kürzeste Wege. Wir notieren dies am Punkt.



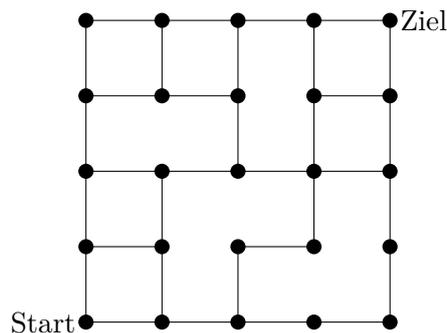
Betrachte nun den Punkt, der zwei Schritte westlich und einen Schritt südlich vom Ziel liegt. Wenn wir dort einen Schritt nach Norden machen, gibt es danach nur noch eine Möglichkeit (dies verrät uns die 1 am Punkt im Norden). Wenn wir stattdessen einen Schritt nach Osten machen, gibt es danach noch zwei kürzeste Wege (deshalb die 2 am Knoten im Osten). Insgesamt haben wir von hier also drei kürzeste Wege, einen über den Punkt im Norden, zwei über den Punkt im Osten.



Auf diese Weise können wir an jeden Punkt die Anzahl der kürzesten Wege von dort bis zum Ziel schreiben, indem wir einfach die Zahl im Norden und die Zahl im Osten addieren. Man muss also gar nicht mehr darüber nachdenken, dass man gerade die kürzesten Wege zählt. Wenn man systematisch von Nordosten nach Südwesten arbeitet, erhält man so schnell folgendes Ergebnis, also gibt es 56 kürzeste Wege vom Start zum Ziel:



Man kann auch kompliziertere Pläne betrachten, zum Beispiel diesen:



Hier können wir ähnlich vorgehen wie oben, nur dass wir nur die Zahlen addieren dürfen, zu denen es auch eine Verbindung gibt. Hat ein Punkt also keine Verbindung

nach Norden, übernehmen wir einfach die Zahl vom Punkt im Osten, und wenn ein Punkt keine Verbindung nach Osten hat, übernehmen wir die Zahl aus dem Norden. Solange die kürzesten Wege nur Schritte nach Norden und Osten enthalten (man also keine Umwege gehen muss) erhält man so das richtige Ergebnis, also bei unserem Beispielplan folgendes:

