Korrespondenzzirkel der LSGM 2015/16

Klasse 7, 4.Treffen am 4. Juni 2016

Aufgaben zum Warmwerden = Känguru 2009

Rechnen mit Kongruenzen

Motivation

Mittels Kongruenzrechnung lassen sich viele zahlentheoretische Aufgaben elegant und einfach lösen.

1. Diophantische Gleichungen (Gleichungen, wo die gesuchten Variablen *ganze* Zahlen sind), wie $15x+3y=100$ oder $24x+36y=3334$ oder $x^2=8y+7$ oder $x^2+y^2+z^2=8u+7$. Zeige, dass die folgenden Gleichungen keine ganzzahligen Lösungen $x,y,z\in\mathbb{Z}$ haben: a) $96x+144y+72z=10002$ bzw. b) $x^2+y^2+z^2=99999$.
2. Teilbarkeitsregeln $n\equiv Q(n) \pmod 9$, $n\equiv A(n) \pmod{11}$.
3. Auf welche beiden Ziffern endet $7^{7^{7^7}}$?
4. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen $m,n\in\mathbb{N}$ gilt $44 \mid 43^{2n+1}+87^{2m}$
5. Wie lautet die letzte Ziffer von f_{2014}, wenn $(f_n)=(1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots)$ die Fibonacci-Folge ist?
6. Drei natürliche Zahlen (a,b,c) bilden ein pythagoräisches Tripel, wenn $a^2+b^2=c^2$. Die beiden kleinsten Tripel sind $(3,4,5)$ und $(4,12,13)$. Zeige, dass stets gilt $60 \mid abc$.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Wiederholung vom 3. Treffen. Im Folgenden ist m stets eine natürliche Zahl, $m\geq 1$.

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a,b\in\mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* m, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a-b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m}\in\mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.

4. $\exists q \in \mathbb{Z}\colon a = qm + b$. (Lies:„Es existiert eine ganze Zahl q mit $a = qm + b$.“)

Wir schreiben $a \equiv b \pmod m$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m“.

Teilbarkeitsregeln:

Satz 1 *Für alle natürlichen Zahlen n mit der Quersumme $Q(n)$ und der alternierenden Quersumme $A(n)$ gilt:*

$$n \equiv Q(n) \pmod 9 \quad \textit{und} \quad n \equiv Q(n) \pmod 3$$
$$n \equiv A(n) \pmod{11},$$

dabei ist z.B. die alternierende Quersumme der 4-stelligen Dezimalzahl $n = [abcd]_{10} = 1000a + 100b + 10c + d$ gleich $A(n) = d - c + b - a$ und die Quersumme $Q(n) = d + c + b + a$.

Beispiele:

$12345 \equiv 54321 \pmod 3$, $\quad 91 \equiv 35 \pmod 7$, $\quad 123456 \equiv 6 \pmod{10}$, $\quad 123456 \equiv 56 \pmod{100}$, $\quad 2010 \equiv -3 \pmod{11}$, $\quad 2011 \equiv 1 \pmod 3$.

$$A(12345) = 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3 \Longrightarrow 12345 \equiv 3 \pmod{11}$$
$$Q(12345) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \Longrightarrow 12345 \equiv 15 \equiv 6 \pmod 9.$$

Spezialfälle: $m = 10$ und $m = 100$. Zwei (natürliche) Dezimalzahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie auf dieselbe Ziffer enden. Zwei Dezimalzahlen sind kongruent modulo 100, wenn ihre letzten beiden Ziffern übereinstimmen.

Aufgabe 1 Für welche Ziffern a, b ist die Dezimalzahl $n = 123ab678$ durch 99 teilbar?
Bemerkung: Es gibt genau 100 aufeinanderfolgende Zahlen n dieser Gestalt. Mindestens eine und höchstens zwei sind davon durch 99 teilbar.

Pause: Rasende Roboter.

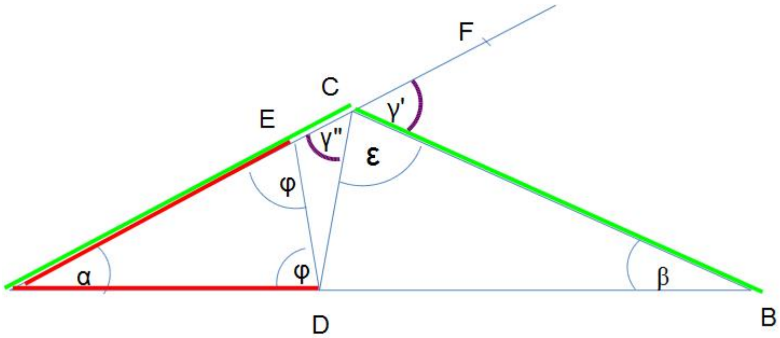
Winkelberechnungen über gleichschenklige Dreiecke

Wir wiederholen den Innenwinkelsatz, Außenwinkelsatz und Satz über das gleichschenklige Dreieck (Basiswinkelsatz).

(1) Innenwinkelsatz.
(2) Außenwinkelsatz.
(3) Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich groß.

Aufgabe 2 Gegeben sei ein Dreieck $\triangle PQR$ und ein Punkt S auf der Strecke $\overline{PQ}$ mit $\overline{PR} = \overline{RS} = \overline{SQ}$ und $\angle PRS = 12°$.
Wie groß ist Winkel $\angle SRQ$?

Lösung: Idee: Betrachte die beiden gleichschenkligen Dreiecke $\triangle PRS$ und $\triangle PSQ$ und wende den Innenwinkel- und Basiswinkelsatz an.



Aufgabe 3 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit den Schenkeln $\overline{AC} = \overline{BC}$. Ferner sei D ein Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ und E ein Punkt auf der Strecke $\overline{AC}$, sodass gilt: $\angle ACD$ ist so groß wie der Außenwinkel bei C und $\overline{AD} = \overline{AE}$.

Welche Beziehung gilt zwischen den Winkeln $\varepsilon = \angle DCB$ und $\varphi = \angle AED$.

Lösung: $\varphi = 67{,}5° + \varepsilon/8$.

Lösung: Die Figur und die gegebenen Stücke sind dieselben wie in Serie 1, Aufgabe 1. Es gibt drei wichtige Feststellungen, die in der obigen Skizze grün, rot und lila markiert sind. Diese 3 Fakten führen auf drei Gleichungen

$$\alpha = \beta, \quad \text{Basiswinkel im Dreieck } ABC \text{ (grün)} \tag{1}$$
$$\gamma' = \gamma'', \quad \text{nach Voraussetzung (lila)} \tag{2}$$
$$\angle ADE = \angle AED = \varphi, \quad \text{Basiswinkel im Dreieck } ADE \text{ (rot)} \tag{3}$$

Nach Außenwinkelsatz im Dreieck ABC bei C und wegen (1) gilt

$$\gamma' = 2\alpha. \tag{4}$$

Nach Innenwinkelsatz im $\triangle ADE$ gilt

$$\alpha + 2\varphi = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180° - 2\varphi. \tag{5}$$

Bei C liegt ein gestreckter Winkel vor:

$$2\gamma' + \varepsilon = 180°. \tag{6}$$

Setzt man nun (4) in (6) ein, so hat man $4\alpha + \varepsilon = 180°$. Setzt man nun noch den Term für α aus (5) hier ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 4(180° - 2\varphi) + \varepsilon &= 180° \\ 720° - 8\varphi + \varepsilon &= 180° \\ 8\varphi - \varepsilon = 540° \Leftrightarrow \varphi &= 67{,}5° + \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen ε und φ.