Korrespondenzzirkel der LSGM 2015/16

Klasse 7, 3.Treffen am 9. April 2016

Aufgaben zum Warmwerden

1) Auf wie viele Nullen endet 60! ? A: $14 = 60/5 + [5/2]$
2) Zwei Würfel und ein Tetraeder werden bunt angemalt. Wie viele Flächen sind bunt? A. $16 = 6 + 6 + 4$.
3) Von zwei Spielwürfeln sieht man die folgenden fünf Augenzahlen auf den Flächen: 1, 2, 3, 5, 6. Wie groß ist die Augensumme der sieben verdeckten Flächen. A. $25 = 2 \cdot 3 \cdot 7 - (1 + 2 + 3 + 5 + 6) = 42 - 17 = 25$.
4) Natascha hat einen Quatsch-Computer: Wenn sie multiplizieren will, dann dividiert er und wenn sie addieren will, subtrahiert er. Natascha gibt $(12 \cdot 3) + (4 \cdot 2)$ ein. Welches Ergebnis zeigt der Taschenrechner an? A. 2.
5) $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$.
6) $100 - 99 + 98 - 97 + 96 - + \cdots - 3 + 2 - 1 = 50$.
7) Die Digitaluhr zeigt 20 : 11 Uhr an. Nach wie vielen Minuten erscheint das nächste Mal wieder eine Uhrzeit mit genau diesen Ziffern $2, 1, 1, 0$? A: 50 min, nämlich um 21 : 01 Uhr.
8) Die vier Seitenmitten eines großen Quadrats bilden ein mittleres Quadrat. Die vier Seitenmitten des mittleren Quadrats bilden ein kleines Quadrat. Wenn das kleine Quadrat die Fläche 6 hat, welches ist die Differenz der Fläche des größten und mittleren Quadrats? A: 12.
9) Welche Zahl ist am größten? 2016^1, $2016 \cdot 1$, $2016 + 1$, 1^{2016}, $1/2016$.?

Rechnen mit Kongruenzen

Motivation

Mittels Kongruenzrechnung lassen sich viele zahlentheoretische Aufgaben elegant und einfach lösen.

1. Diophantische Gleichungen (Gleichungen, wo die gesuchten Variablen *ganze* Zahlen sind), wie $15x + 3y = 100$ oder $24x + 36y = 3334$ oder $x^2 = 8y + 7$ oder $x^2 + y^2 + z^2 = 8u + 7$. Zeige, dass die folgenden Gleichungen keine ganzzahligen Lösungen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ haben: a) $96x + 144y + 72z = 10002$ bzw. b) $x^2 + y^2 + z^2 = 99999$.

2. Teilbarkeitsregeln $n \equiv Q(n) \pmod 9$, $n \equiv A(n) \pmod{11}$.

3. Auf welche beiden Ziffern endet $7^{7^{7^7}}$?

4. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $44 \mid 43^{2n+1} + 87^{2m}$
5. Wie lautet die letzte Ziffer von f_{2014}, wenn $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$ die Fibonacci-Folge ist?
6. Drei natürliche Zahlen (a, b, c) bilden ein pythagoräisches Tripel, wenn $a^2 + b^2 = c^2$. Die beiden kleinsten Tripel sind $(3, 4, 5)$ und $(4, 12, 13)$. Zeige, dass stets gilt $60 \mid abc$.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Im Folgenden ist m stets eine natürliche Zahl, $m \geq 1$.

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo m*, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a - b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q \in \mathbb{Z} \colon a = qm + b$. (Lies:„Es existiert eine ganze Zahl q mit $a = qm + b$.")

Wir schreiben $a \equiv b \pmod{m}$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m".

Spezialfall: $b = 0$. $a \equiv 0 \pmod{m}$ bedeutet nach Bedingung 2, dass m ein Teiler von a ist, also $m \mid a$.
Gerade Zahlen lassen stets den Rest 0 bei Division durch 2 und ungerade Zahlen stets den Rest 1. Alle geraden Zahlen sind untereinander kongruent modulo 2 und ebenso alle ungeraden Zahlen. Welche Reste treten bei Division durch 3 auf, natürlich 0, 1 und 2. Alle ganzen Zahlen, die denselben Rest lassen fassen wir zu einer *Restklasse* zusammen:

$$\begin{aligned}
[0]_3 &= \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9, -12, \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\},\\
[1]_3 &= \{1, 4, 7, 10, 13, -2, -5, -8, \dots\} = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\},\\
[2]_3 &= \{2, 5, 8, 11, -1, -4, -7, \dots\} = \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Zahlen, die in derselben Klasse liegen, heißen *zueinander kongruent modulo 3*. Wir schreiben

$$0 \equiv 3 \pmod{3}, \quad 7 \equiv -8 \pmod{3}, \quad 5 \equiv -7 \pmod{3}.$$

Bei der Division durch 2 gibt es nur zwei Restklassen, 0 und 1. Die Restklasse $[0]_2$ der durch 2 teilbaren Zahlen ist die Menge der geraden Zahlen und die Restklasse $[1]_2$ ist die Menge der ungeraden Zahlen. Die Kongruenz modulo m ist eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge der ganzen Zahlen: Jede ganze Zahl liegt in einer Äquivalenzklasse und keine ganze Zahl liegt in mehreren Äquivalenzklassen. Die Haupteigenschaften einer Äquivalenzrelation sind *Reflexivität*, *Symmetrie* und *Transitivität*.
Beispiele:

$$12345 \equiv 54321 \pmod{3}, \quad 91 \equiv 35 \pmod{7}, \quad 123456 \equiv 6 \pmod{10}, \quad 123456 \equiv 56 \pmod{100},$$
$$2010 \equiv -3 \pmod{11}, \quad 2011 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Spezialfälle: $m = 10$ und $m = 100$. Zwei (natürliche) Dezimalzahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie auf dieselbe Ziffer enden. Zwei Dezimalzahlen sind kongruent modulo 100, wenn ihre letzten beiden Ziffern übereinstimmen.

Wir zeigen, dass $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$ und $c = u^2 + v^2$ stets ein pythagoräisches Tripel bilden. Wir wiederholen dazu die Potenzgesetz $(a^m)^n = a^{mn}$, $(abc)^m = a^m b^m c^m$ und die drei binomischen Formeln:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2,\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Pause: Rasende Roboter.

Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wir wiederholen die vier Grundkonstruktionen, bei denen rechte Winkel eine Rolle spielen:

1) Errichten der **Mittelsenkrechten** zu einer Strecke $\overline{AB}$; Neudefinition des Begriffs „Mittelsenkrechte".
2) **Lot fällen** von einem Punkt P auf eine Gerade, wobei P nicht auf der Geraden liegt.
3) **Senkrechte errichten** zu einer Geraden g in einem Punkt P von g.
4) **Parallelverschiebung** parallel zu einer Geraden g durch einen Punkt P außerhalb von g.

Wir wiederholen die Konstruktion der **Winkelhalbierenden**.

Aufgabe 1 Konstruiere ein Dreieck ABC aus den drei Stücken c, s_a, h_c, wobei s_a und h_c die Längen der Seitenhalbierenden $\overline{AM}$ bzw. der Höhe von C auf AB ist.

Lösung: Idee: Durch Punktspiegelung des Dreiecks ABC am Mittelpunkt M der Seite $\overline{BC}$ ensteht ein kongruentes, um 180° gedrehtes Dreieck DCB bzw. ein Parallelogramm $ABDC$. Vom Hilfsdreieck ABD sind $\overline{AB} = c$, h_c und $\overline{AD} = 2s_a$ bekannt. Es lässt sich daher leicht konstruieren. Dann konstruiert man den Mittelpunkt M von $\overline{AD}$ und trägt an $\overline{BM}$ über M hinaus $\overline{BM}$ an und erhält C.

Aufgabe 2 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Höhenfußpunkten DEF. Zeige, dass die Höhen in ABC genau die Winkelhalbierenden in Dreieck DEF sind.

Lösung: Idee: Benötigt wird die Umkehrung des Thalessatzes, um zu zeigen, dass F, B, C, E auf einem gemeinsamen Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{BC}$ liegen. Dann ist $FBCE$ ein Sehnenviereck und damit ist der Außenwinkel bei F gleich dem gegenüberliegenden Innenwinkel $\angle ACB = \gamma$.