Korrespondenz-Seminar der LSGM 2015/16

Klasse 7, Treff 1 am 14. November 2015

Warm-Werde-Aufgaben:

1) Auf wie viele Nullen endet 10! bzw 31!? A: 7
2) Ein Quadrat der Fläche 196 hat welchen Umfang? A. 56
3) $1111 - 222 = 889$
4) Jemand hat 11 rote, 12 braune und 13 schwarze Sochen in einem Beutel. Wie viele Socken muss er blind aus dem Beutel ziehen, damit er mit Sicherheit ein schwarzes Paar Socken hat? A: 25
5) $1+2+3+4+5+6=21$
6) Man erhält aus einem A0 Blatt ein A1 Blatt indem man es auf der Verbindung der beiden längeren Seiten halbiert. Dasselbe Verfahren wendet man an, um A2, A3 und A4 zu erzeugen. Wie viele A4 Blätter braucht man zum Überdecken eines A0 Blattes? A: 16

Fakultäten

Es wird erläutert, wie man auf die Anzahl der Endnullen bei $n! = n(n-1)\cdots 2\cdots 1$ kommt. Dieses Symbol heißt $n!$ (gelesen „n Fakultät"). Man muss die Anzahl der Faktoren 5 zählen. Bei 31 hat man $31/5 = 6$ einfache Faktoren 5 (5,10,15,20,25,30) und eine doppelte 5 bei $25 = 5^2$. Damit hat man 7 Faktoren 5 und somit 7 Endnullen. Wir berechnen $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ und überlegen uns, dass 10! auf 2 Nullen endet und 31! auf 7 Nullen.

Umformen und Lösen von Gleichungen

Problem: Welche Seitenlängen hat ein Blatt vom Format A0? Voraussetzungen:

1) Halbiert man ein Ax-Blatt durch die Verbindung der Seitenmitten der beiden gegenüberliegenden längsten Seiten, so erhält man ein A(x+1)-Blatt.
2) Alle Ax-Rechtecke sind einander ähnlich, das heißt, das Seitenverhältnis aus längerer zu kürzerer Seite ist konstant.
3) Die Fläche eines A0-Blattes beträgt $1\,\mathrm{m}^2$.

Termumformungen am Beispiel der Papierformate von A0 bis A5

Wir wollen das Seitenverhältnis eines A4-Blattes bestimmen. Es seien a und b die längere bzw. kürzere Seite des A4-Rechtecks. Man erhält dann das A3-Rechteck, indem man die kleinere Seite verdoppelt (die dann zur größeren Seite wird) und die Größere Seite beibehält (die dann zur kleineren Seite wird). Dann sind $2b$ und a die längere bzw. kürzere Seite des Rechtecks A3. Die zweite wichtige Bemerkung ist, dass alle Rechtecke A0, A1 usw. zueinander *ähnlich* sind. Das heißt, dass das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite immer gleich ist. Also gilt: $a : b = 2b : a$.

$$a : b = 2b : a.$$

Dies formen wir nun um, um das Verhältnis $\frac{a}{b}$ explizit zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{b}{\frac{a}{2}} \quad | \cdot b \\
\frac{a}{b} b &= \frac{b}{\frac{a}{2}} b \\
a &= \frac{b \cdot b}{\frac{a}{2}} \quad | \cdot \frac{a}{2} \\
a \cdot \frac{a}{2} &= b^2 \\
\frac{a^2}{2} &= b^2 \quad | \cdot 2 : b^2 \\
\frac{a^2}{b^2} &= 2 \\
\left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2 \quad | \sqrt{} \\
\frac{a}{b} &= \sqrt{2} \approx 1,4142.
\end{aligned}$$

Tatsächlich ergeben die Messungen der Seitenlängen eines A4 Blattes $21,0\,\mathrm{cm}$ bzw $29,7\,\mathrm{cm}$, was ungefähr dem Verhältnis $\sqrt{2}$ entspricht.

Wir bestimmen nun die Seitenlängen des A0-Blattes. Hier gilt einerseits $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ und außerdem $ab = 1\,\mathrm{m}^2$. Setzt man $a = b\sqrt{2}$ in die zweite Gleichung ein, so hat man $b\sqrt{2} \cdot b = 1$ also $b^2 = 1/\sqrt{2}$. Zieht man hier noch einmal die Wurzel, so hat man $b = 1/\sqrt{\sqrt{2}} = 0,841$ und $a = 1,19$ (Angaben in m). Geometrisch erhält man dasselbe Resultat, wenn man die Seitenlängen des A4-Blattes beide vervierfacht, also $a = 4 \cdot 29,7\,\mathrm{cm} = 1,188\,\mathrm{m}$ und $b = 4 \cdot 21,0\,\mathrm{cm} = 0,84\,\mathrm{m}$.

Für das A4-Blatt erhält man $a_4 = \sqrt[4]{2}/4 = 0,2973\ldots$ und für die kleinere Seite $b_4 = a_4/\sqrt{2} = 0,2102\ldots$.

Teilbarkeit

Teilbarkeitsregeln

Wir wiederholten die bekannten Teilbarkeitsregeln für 2 bis 10. Für eine $k$stellige Dezimalzahl $n = [a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0]_{10}$ mit den Ziffern $a_k, a_{k-1}, \cdots a_0$ ist die *Quersumme* gleich $Q(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$. Die *alternierende Quersumme* $A(n)$ ist die abwechselnde Summe und Differenz der Ziffern:

$$A(n) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k.$$

Dabei beginnt man mit den Einern, subtrahiert die Zehner, addiert die Hunderter usw. Bsp. $A(62891) = 1-9+8-2+6 = 4$, $A(121) = 1-2+1 = 0$, $A(100) = 0-0+1$.

Elferregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 11 denselben Rest wie ihre alternierende Quersumme $A(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 11 teilbar, wenn $A(n)$ durch 11 teilbar ist.

Neunerregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme $Q(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 9 teilbar ist.

Dreierregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 3 denselben Rest wie ihre Quersumme $Q(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 teilbar ist.

Beispiele: Es gilt $62891 : 11 = 5717$ Rest 4. Auch $A(62891) = 4$ lässt bei Division durch 11 den Rest 4. $A(121) = 0$, also ist 121 durch 11 teilbar. $Q(100) = 1$, also lässt 100 bei Division durch 9 den Rest 1.

Sechserregel: Eine natürliche Zahl ist durch 6 genau dann teilbar, wenn ihre Einerziffer gerade ist und ihre Quersumme durch drei teilbar ist.

Siebenerregel: Eine natürliche Zahl $n = 10a + b$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $a - 2b$ durch 7 teilbar ist. Beispiel: $n = 91$. Abtrennen der 1 und Verdoppeln (2) und subtrahieren vom Rest ergibt $9 - 2 = 7$. Also ist $7 \mid 91$.

Aufgabe 1 Für welche Ziffern a und b ist die Zahl $n = 123a56b$ durch 66 teilbar?

Lösung. Die Zahl n muss durch 2,3 und 11 teilbar sein. Also muss b gerade sein, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Wegen der Dreierregel muss $Q(n) = 1+2+3+a+5+6+b = 17+a+b$ durch 3 teilbar sein und wegen der 11er-Regel muss $A(n) = b-6+5-a+3-2+1 = b-a+1$ durch 11 teilbar sein. Man findet zwei Lösungen für a und b.

Aufgabe 2 Für welche Ziffer a ist die Zahl $n = 125a6$ durch 9 teilbar?

Lösung. $Q(n) = 1+2+5+a+6 = 14+a$. Nach den Teilbarkeitregeln muss $Q(n)$ durch 9 teilbar sein, also $a = 4$.

Aufgabe 3 Für welche Ziffer a ist die Zahl $n = 125a6$ durch 11 teilbar?

Lösung. $A(n) = 6 - a + 5 - 2 + 1 = 10 - a$. Nach den Teilbarkeitregeln muss $A(n)$ durch 11 teilbar sein, das heißt $a = 10$. Es gibt also keine Lösung.

Aufgabe 4 Für welche Ziffern a und b ist die Zahl $n = 12ba6$ durch 99 teilbar?

Lösung. $Q(n) = 9+a+b$, $A(n) = 6-a+b-2+1 = 5-a+b$. Nach den Teilbarkeitregeln muss $Q(n)$ durch 9 teilbar sein und $A(n)$ durch 11. Somit erhält man $a + b = 0$ oder $a + b = 9$ und $-a + b = 6$ oder $-a + b = -5$. Nur die Kombination 9 -5 führt auf eine ganzzahlige Lösung und zwar $a = 7$ und $b = 2$. Tatsächlich ist $12726 = 99 \cdot 124$.

Pause: Rasende Roboter.