Korrespondenzzirkel der LSGM 2014/15

Klasse 7, Treffen 2 am 21. März 2015

Gauß-Addition

Der Mathelehrer Büttner des kleinen Carl Friedrich Gauß (deutscher Mathematiker, 1777-1855) wollte seine Ruhe haben und ließ die Klasse die folgende Additionsaufgabe rechnen

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$$

Nach wenigen Minuten meldete sich Carl-Friedrich und zeigte dem Lehrer das richtige Ergebnis. Der Lehrer war überhaupt nicht erfreut und dachte, dass ihn Carl Friedrich zum Narren halten wollte, doch die Rechnung war korrekt. Wie hatte er dies angestellt: Er fasste den ersten und den letzten, den zweiten und den vorletzten Summanden usw. zusammen bis er 50 Paare von Summanden gebildet hatte, die alle gleich 101 waren:

$$s = (1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (49 + 52) + (50 + 51) = 50 \cdots 101 = 5050.$$

Weitere Beispiele.

(a) Wie groß ist $s = 1 + \cdot + 100 + 101$?
(b) Wie groß ist $s = 1000 + 1001 + \cdots + 2000$?

Lösung. (a) $s = 5050 + 101 = 5151$. Die allgemeine Formel der Summe der ersten n natürlichen Zahlen lautet

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n + 1).$$

(b) Es gibt zwei Lösungswege, zum einen wie bei Gauß die Paarbildung

$$\begin{aligned} s &= (1000 + 2000) + (1001 + 1999) + \cdots + (1499 + 1501) + 1500 \\ &= 500 \cdot 3000 + 1500 = 1500000 + 1500 = 1501500. \end{aligned}$$

Zweiter Lösungsweg: Von der Summe $r = 1+2+3+\cdots+2000$ wird die Summe $t = 1+\cdots+999$ abgezogen und es bleibt die Summe s übrig:

$$s = \frac{1}{2} 2000 \cdot 2001 - \frac{1}{2} 999 \cdot 1000.$$

Die Zahlen $s_n = \frac{1}{2} n(n+1)$ heißen auch *Dreieckszahlen*, da sie die Anzahl der Punkte in einem Dreiecksgitter der Gitterlänge n sind.

Aufgabe 1 In wie viele Teile wird die Ebene durch n Geraden in allgemeiner Lage geteilt.

Lösung: Die Aufgabe lässt sich *rekursiv* lösen. Bei einer Geraden gibt es 2 Teile, bei 2 Geraden 4 Teile. Kommt die $n$te Gerade hinzu, so kommen werden genau n Gebiete geteilt; es kommen also n Gebiete hinzu. Man erkennt, dass es genau $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ Teile sind.

Aufgabe 2 Wie viele Quadrate q_n *verschiedener Größe* kann man in einem $n \times n$-Gitter finden.

Lösung: Diese Aufgabe wurde beim Känguru-Wettbewerb 2015 in Klasse 9/10 für $n = 5$ gestellt. Man kann sich überlegen, dass die folgenden Anzahlen für kleine n richtig sind:

n	1	2	3	4	5
q_n	1	3	5	8	11

Eine Rekursionsformel haben wir noch nicht gefunden. Pause: SET und Rasende Roboter

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Ein Lineal wird nur verwendet, um *zwei verschiedene Punkte der Zeichenebene durch eine Gerade zu verbinden.* Ein Zirkel wir nur dazu verwendet, um *einen Kreis zu zeichnen mit vorgegebenem Radius, gegeben durch 2 Punkte der Ebene, und vorgegebenem Mittelpunkt.* Schließlich kann man zwei Geraden, eine Gerade und einen Kreis und zwei Kreise zum Schnitt bringen. Diese Schnittpunkte sind konstruierbare Punkte. „Verboten" ist die Verwendung eines Winkelmessers und einer Zentimeterskala; es wird nicht gemessen.

Wir wiederholen die folgenden Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal:

> Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$,
> Winkelhalbierende konstruieren,
> Lot fällen von einem Punkt P auf eine (nicht durch P) verlaufende Gerade g,
> Senkrechte errichten auf eine Gerade g in einem Punkt P der Geraden.

Aufgabe 3 Konstruiere mit Hilfe der obigen Grundkonstruktionen zu einer Geraden g die Parallele durch einen nicht auf g liegenden Punkt P.

Lösung: Zunächst fällt man das Lot h von P auf g und dann errichtet man die Senkrechte in P auf h. Dies ist die gesuchte Parallele zu g.

Aufgabe 4 Zu konstruieren ist ein Trapez $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = \overline{AB} = 8$, $b = \overline{BC} = 4$, $c = \overline{CD} = 6$ und $d = \overline{DA} = 3$. Die Seiten a und c seien parallel. (Man kann davon ausgehen, dass in der Zeichenebene eine Einheitsstrecke der Länge 1, etwa $e = \overline{PQ}$ gegeben ist.)

Lösung: Angenommen das Trapez $ABCD$ existiert so, dann kann man auf $\overline{AB}$ einen Punkt E fixieren, sodass $AECD$ ein Parallelogramm ist. Das Dreieck EBC hat drei bekannte Seiten, nämlich 2, 3, 4 und lässt sich mittels Kongruenzsatz SSS konstruieren.