Korrespondenz-Seminar der LSGM 2014/15

Klasse 7, Treff 1 am 15. November 2014

Fakultäten und Kombinatorik

In der Schul-Kombinatorik weden untersucht

> Permutationen, das sind Anordnungen von Objekten,
> Kombinationen, das sind Auswahlen von k Objekten aus n Objekten, ohne Beachtung der Reihenfolge/Anordnung,
> Variationen, dasselbe wie Kombinationen nur mit Beachtung der Reihenfolge.

Es sei $a(n)$ die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Gegenständen (in einer Reihe).

Beispiel. Wie viele verschiedene Flaggen lassen sich mit schwarz, rot, gold färben (wenn es drei Streifen gibt, jede Farbe vorkommen soll und oben und unten festgelegt sind). Es gibt die folgenden 6 Anordnungen: $(s,r,g),(s,g,r),(g,r,s),(g,s,r),(r,s,g),(r,g,s)$. Es gilt also $a(3)=6$. Man findet schnell $a(1)=1$ und $a(2)=2$. Wie aber sieht $a(n)$ für allgemeines $n\in\mathbb{N}$ aus? Wie schnell wächst diese Funktion? Wir haben durch Anordnung der Ziffern $1,2,3,4$ die Anzahl $a(4)=24$ ermittelt und gesehen, dass beim Übergang von $n-1$ auf n Objekte sich die Anzahl mit n multipliziert:

$$a(n)=na(n-1)=n\cdot(n-1)\cdot a(n-2)=\cdots n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!.$$

Dieses Symbol heißt $n!$ (gelesen „n Fakultät“). Im nächsten Schritt wurden einige der anzuordnenden Objekte der gleichen Sorte zugeordnet, sodass sie nicht unterscheidbar sind, wie etwa $1,1,2,2$ und $1,1,1,2,2,2$. Es wurden die folgenden Formeln vermutet $4!/(2!2!)$, $6!/(3!3!)$. Allgemein gilt: Die Anzahl der Möglichkeiten n Gegenstände aus k Sorten in einer Reihe anzuordnen beträgt

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Dabei sind n_1 Gegenstände der Sorte 1, n_2 Gegenstände der Sorte 2 usw. und n_k Gegenstände der Sorte k vorhanden; es gilt also $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$. Man spricht hier von *Permutationen mit Wiederholung*.

Beispiel. In Timos Klasse gibt es 17 Jungen und 4 Mädchen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Jungen und Mädchen in einer Reihe aufzustellen, wenn es dabei nur um die Zugehörigkeit zu den Jungen bzw. Mädchen geht. Lösung. Hier ist $n_1=17$ und $n_2=4$, also ist die Anzahl gleich $21!/(17!4!)=21\cdot 20\cdot 19\cdot 18)/24$.

Teilbarkeit

Teilbarkeitsregeln

Wir wiederholten die bekannten Teilbarkeitsregeln für 2 bis 10. Für eine $k$stellige Dezimalzahl $n = [a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0]_{10}$ mit den Ziffern $a_k, a_{k-1}, \cdots a_0$ ist die *Quersumme* gleich $Q(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$. Die *alternierende Quersumme* $A(n)$ ist die abwechselnde Summe und Differenz der Ziffern:

$$A(n) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k.$$

Dabei beginnt man mit den Einern, subtrahiert die Zehner, addiert die Hunderter usw. Bsp. $A(62891) = 1 - 9 + 8 - 2 + 6 = 4$, $A(121) = 1 - 2 + 1 = 0$, $A(100) = 0 - 0 + 1$.

Elferregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 11 denselben Rest wie ihre alternierende Quersumme $A(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 11 teilbar, wenn $A(n)$ durch 11 teilbar ist.

Neunerregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme $Q(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 9 teilbar ist.

Dreierregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 3 denselben Rest wie ihre Quersumme $Q(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 teilbar ist.

Beispiele: Es gilt $62891 : 11 = 5717$ Rest 4. Auch $A(62891) = 4$ lässt bei Division durch 11 den Rest 4. $A(121) = 0$, also ist 121 durch 11 teilbar. $Q(100) = 1$, also lässt 100 bei Division durch 9 den Rest 1.

Sechserregel: Eine natürliche Zahl ist durch 6 genau dann teilbar, wenn ihre Einerziffer gerade ist und ihre Quersumme durch drei teilbar ist.

Aufgabe. Für welche Ziffern a und b ist die Zahl $n = 123a56b$ durch 66 teilbar?

Lösung. Die Zahl n muss durch 2,3 und 11 teilbar sein. Also muss b gerade sein, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Wegen der Dreierregel muss $Q(n) = 1 + 2 + 3 + a + 5 + 6 + b = 17 + a + b$ durch 3 teilbar sein und wegen der 11er-Regel muss $A(n) = b - 6 + 5 - a + 3 - 2 + 1 = b - a + 1$ durch 11 teilbar sein. Man findet zwei Lösungen für a und b.

Lösen von Gleichnugen

Wir wiederholen das **Distributivgesetz** $a(b + c) = ab + ac$, das für Termumformungen eine wichtige Rolle spielt und wir wiederholen

$$-(a+b) = -a - b, \quad -(a-b) = a + b, \quad -(-a+b) = a - b, \quad -(-a-b) = a + b,$$
$$+(a+b) = a + b, \quad +(a-b) = a - b.$$

Pause: Rasende Roboter.