Korrespondenzzirkel der LSGM 2013/14

Klasse 7, Treffen 4 am 14. Juni 2014

Zum Warmwerden gibt es kleine Aufgaben.

> Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen $8 \cdot 93$ und $9 \cdot 82$? 5 Stück
> Es ist 9:10 Uhr. Welche Winkel schließen großer und kleiner Zeiger ein? 145°
> $1111 - 222 = 889$
> Ein Quadrat hat die Fläche $169\,\mathrm{m}^2$. Wie groß ist sein Umfang? $52\,\mathrm{m}$
> Wie viele Dreiecke einthält diese Figur: Quadrat mit Diagonalen und eingezeichneter Verbindung benachbarter Seitenmitten. 20 Dreiecke.
> Wie viele achsenparallele Quadrate enthält das 5×5-Gitter. $16 + 9 + 4 + 1 = 30$.
> Wie viele A4-Blätter benötigt man, um ein A0-Blatt vollständig zu überdecken? 16 A4.
> $11 + 12 + 13 + \cdots + 20 = 155$.

Umformen und Lösen von Gleichungen

Problem: Welche Seitenlängen hat ein Blatt vom Format A0? Voraussetzungen:

> 1) Halbiert man ein Ax-Blatt durch die Verbindung der Seitenmitten der beiden gegenüberliegenden längsten Seiten, so erhält man ein A(x+1)-Blatt.
> 2) Alle Ax-Rechtecke sind einander ähnlich, das heißt, das Seitenverhältnis aus längerer zu kürzerer Seite ist konstant.
> 3) Die Fläche eines A0-Blattes beträgt $1\,\mathrm{m}^2$.

Termumformungen am Beispiel der Papierformate von A0 bis A4

Wir wollen das Seitenverhältnis eines A4-Blattes bestimmen. Es seien a und b die längere bzw. kürzere Seite des A4-Rechtecks. Man erhält dann das A3-Rechteck, indem man die kleinere Seite verdoppelt (die dann zur größeren Seite wird) und die Größere Seite beibehält (die dann zur kleineren Seite wird). Dann sind $2b$ und a die längere bzw. kürzere Seite des Rechtecks A3. Die zweite wichtige Bemerkung ist, dass alle Rechtecke A0, A1 usw. zueinander *ähnlich* sind. Das heißt, dass das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite immer gleich ist. Also gilt: $a : b = 2b : a$.

$$a : b = 2b : a.$$

Dies formen wir nun um, um das Verhältnis $\frac{a}{b}$ explizit zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{b}{\frac{a}{2}} \quad |\cdot b \\
\frac{a}{b}\, b &= \frac{b}{\frac{a}{2}}\, b \\
a &= \frac{b \cdot b}{\frac{a}{2}} \quad |\cdot \frac{a}{2} \\
a \cdot \frac{a}{2} &= b^2 \\
\frac{a^2}{2} &= b^2 \quad |\cdot 2 : b^2 \\
\frac{a^2}{b^2} &= 2 \\
\left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2 \quad |\sqrt{} \\
\frac{a}{b} &= \sqrt{2} \approx 1,4142.
\end{aligned}$$

Tatsächlich ergeben die Messungen der Seitenlängen eines A4 Blattes $21,0\,\mathrm{cm}$ bzw $29,7\,\mathrm{cm}$, was ungefähr dem Verhältnis $\sqrt{2}$ entspricht.
Wir bestimmen nun die Seitenlängen des A0-Blattes. Hier gilt einerseits $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ und außerdem $ab = 1\,\mathrm{m}^2$. Setzt man $a = b\sqrt{2}$ in die zweite Gleichung ein, so hat man $b\sqrt{2} \cdot b = 1$ also $b^2 = 1/\sqrt{2}$. Zieht man hier noch einmal die Wurzel, so hat man $b = 1/\sqrt{\sqrt{2}} = 0,841$ und $a = 1,19$ (Angaben in m). Geometrisch erhält man dasselbe Resultat, wenn man die Seitenlängen des A4-Blattes beide vervierfacht, also $a = 4 \cdot 29,7\,\mathrm{cm} = 1,188\,\mathrm{m}$ und $b = 4 \cdot 21,0\,\mathrm{cm} = 0,84\,\mathrm{m}$.
Für das A4-Blatt erhält man $a_4 = \sqrt[4]{2}/4 = 0,2973\ldots$ und für die kleinere Seite $b_4 = a_4/\sqrt{2} = 0,2102\ldots$.
Aufgaben:

1) Kann man aus einem Quadrat ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}$ falten?
2) Warum liefert der „Papierknoten“ ein reguläres Fünfeck?
3) Kann man ein A4-Blatt mit 4 Kniffen zu einem regulären Fünfeck falten?
4) Kann man ein Quadrat in sämtlich spitzwinklige Dreiecke zerlegen?

Schriftliches Wurzelziehen

Das schriftliche Wurzelziehen wird anhand von mehreren Beispielen erläutert. Dies ist ein direktes Verfahren, das mit jedem Schritt eine neue gültige Stelle liefert.

Unter der Überschrift „ Darstellung anhand eines konkreten Beispiels“ ist das Verfahren hier beschrieben: http://de.wikipedia.org/wiki/Schriftliches_Wurzelziehen

Ein Verfahren, das unserem sehr ähnlich ist, ist am Ende dieses Videos erklärt: http://www.youtube.com/watch?v=sUVAixDL7uI

Kongruenzrechnung

Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt
a) $55 \mid 5324^{2n+1} + 396^{2n}$ und $63 \mid 154^{2n} + 98^{2n+1}$.
Beweise, dass für alle ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $7 \mid a^3 + b^3 + c^3$, dann $7 \mid abc$.

Pause: Rasende Roboter. Eis.

Dreieckskonstruktionen mit Summen und Differenzen von Streckenlängen

Idee: Ist ein Dreieck nicht direkt über einen der 4 Kongruenzsätze konstruierbar, dann sollte man ein geeignetes Hilfsdreieck finden, das konstruierbar ist.

Aufgaben: Konstruiere ein Dreieck aus den jeweiligen Stücken.

1) $a + b + c, \alpha, \beta$.
2) $a + b, \alpha, c$ oder $a - b, \alpha, c$.
3) $a + b, c, \alpha$.

Konstruiere ein Trapez mit parallelen Seiten $CD \parallel AB$, wenn die vier Seiten a, b, c, d gegeben sind bzw. wenn a, c, e, f gegeben sind, wobei e und f die Längen der beiden Diagonalen sind.

Offen: Wiederholung der Kongruenzrechnung