Korrespondenzzirkel der LSGM 2013/14

Klasse 7, Treff 3 am 10. Mai 2014

Zum Warmwerden gibt es kleine Aufgaben.

> Wie oft lässt sich 10! ohne Rest durch 2 teilen? 8 Mal, $8 = [10/2] + [10/4] + [10/8]$
> Wie groß ist das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen 3, 4 und 5? 60
> Wie groß ist die Oberfläche eines Quaders mit den Kantenlängen 3, 4 und 5? 94
> $\sqrt{529} = 23$
> $111 - 22 = 89$
> $1001/7 = 143$
> $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55.$

Gaußsummen

Motivation

Da sich der Mathelehrer eine ruhige Stunde machen wollte, sollten seine Schüler die Zahlen von 1 bis 100 addieren. Carl Friedrich Gauß löste die Aufgabe innerhalb 2 Minuten und zog damit den Zorn des Lehrers auf sich (Kehlmann, Die Vermessung der Welt). Gauß benutzte folgenden Trick: er fasste den ersten und letzten Summanden, den zweiten und vorletzten usw. immer zu 101 zusammen. Das konnte er mit allen 100 Zahlen tun, das letzte Pärchen ist 50, 51. Es wurden genau 50 Paare gebildet. Damit ist $s = 50 \cdot 101 = 5050$. Dieser Trick funktioniert nicht ganz, wenn bis 101 addiert werden soll. Fasst man hier zu Paaren zusammen, so bleibt in der Mitte die 51 übrig, denn 50, 52 ist das letzte Pärchen. Daher ist das *Verdoppeln* der Summe das bessere Vorgehen. Wir addieren

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n &= s, \\ n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 &= s, \end{aligned}$$

und erhalten $(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = 2s$, wobei links genau n Summanden stehen. Daher ist die Summe gleich $n(n+1) = 2s$ bzw. nach Division durch 2 hat man $s = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Variation 1: Ungerade Summanden

Wir wollen mit demselben Trick $s = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ berechnen. Bildet man nacheinander für $n = 1, 2, 3, \ldots$ diese Summen, so erhält man die Quadratzahlen $1, 4, 9, 16, 25, \cdots$. Es liegt also die Vermutung nahe, dass $s = n^2$. Durch Verdoppeln der Summe (und Invertierung der Reihenfolge) hat man

$$2s = (2n) + (2n) + \cdots (2n).$$

Aber wie viele Summanden tauchen da auf? Dies erhält man durch systematisches Aufschreiben der Summanden:

$$2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 2 - 1, \ldots (2 \cdot (n-1) - 1), 2n - 1.$$

Dabei werden genau die Zahlen von 1 bis n durchlaufen, also sind es n Summanden und man hat $2s = (2n) \cdot n = 2n^2$ und damit $s = n^2$.

Variation 2: Summanden von m bis n

Berechne $s = m + (m+1) + \cdots + (n-1) + n$ für $n \geq m$. Wieder ist das große Problem: Wie viele Summanden sind dies? Von 1 bis n sind es n Stück. Davon fallen die Summanden von 1 bis $m-1$ weg, also bleiben $n - (m-1) = n - m + 1$ übrig. Daher gilt

$$s = \frac{1}{2}(n - m + 1)(n + m).$$

Variation 3: Summanden von m bis n, aber mit Lücken

Bestimme $s = 1001 + 1004 + 1007 + \cdots + 2999$ also die Summe aller natürlichen Zahlen von 1000 bis 3000, die kongruent 2 modulo 3 sind. Auch hier hilft das systematische Aufschreiben der Summanden beim Abzählen ihrer Anzahl:

$$s = 3 \cdot 333 + 2 + (3 \cdot 334 + 2) + \cdot + (3 \cdot 999 + 2).$$

Dies entspricht also der Folge natürlicher Zahlen $333, 334, \ldots, 999$. Ihre Anzahl ist $999 - 333 + 1 = 667$. Somit ist $s = (1001 + 2999)/2 \cdot 667 = 1500 \cdot 677$. Allgemein gilt

$$s = (3m+1) + (3m+4) + \cdots + (3n+1) = \frac{1}{2}(m - n + 1)(3m + 3n + 2).$$

Pause: Rasende Roboter.

Grundkonstruktionen

Wir wiederholen 4 Grundkonstruktionen: Lot fällen, Mittelsenkrechte errichten, Senkrechte errichten, Winkelhalbierende zeichnen.

Die Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende lassen sich durch eine charakteristische Eigenschaft definieren:

> Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ist der geometrische Ort aller der Punkte P, die von A und B denselben Abstand haben, also $\overline{PA} = \overline{PB}$.
> Die Winkelhalbierende von zwei Strahlen a und b ist die Menge aller Punkte P, die von a und b denselben Abstand haben.

Wir zeigten, dass die ursprüngliche Definition der Mittelsenkrechten (als die Gerade durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, die senkrecht zu AB ist) und die obige Definition gleichwertig (äquivalent sind). Anwendungen: Durch diese neuen Definitionen ist sofort klar, dass sich die Mittelsenkrechten im Dreieck in einem Punkt schneiden und dass dies der Mittelpunkt des Umkreises ist. Analog schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.

Beispiel: Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt außerhalb. Konstruiere den Punkt des Kreises, der vom gegebenen Punkt den minimalen Abstand hat.

Offen: Dreieckskonstruktionen mit $a+b+c$ oder $b-a$.

Offen: Umformung der Heronschen Dreiecksformel zu

$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{-b^4-a^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2}.$$

Offen: Wiederholung der Kongruenzrechnung