Korrespondenz-Seminar der LSGM 2013/14

Klasse 7, Treff 1 am 16. November 2013

Fakultäten und Kombinatorik

Zuerst wurde das Symbol $n!$ geklärt und gezeigt, dass es $n!$ verschiedene Anordnungen von n verschiedenen Gegenständen gibt; $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$ am Beispiel von Flaggen und von 8 Türmen auf dem Schachbrett. Nun wurden alle verschiedenen Anordnungen von $\{1,2,6,9\}$ von $\{1,1,6,9\}$, von $\{1,1,6,6\}$, von $\{1,1,1,6\}$ und von $\{1,1,1,1\}$ gesucht. Es wurden jeweils 24, 12, 6, 4 bzw. eine Anodnungen gefunden. Es wurden die folgenden Formeln vermutet 4!, 4!/2!, 4!/(2!2!), 4!/3! und 4!/4!. Allgemein gilt: Die Anzahl der Möglichkeiten n Gegenstände aus k Sorten in einer Reihe anzuordnen beträgt

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Dabei sind n_1 Gegenstände der Sorte 1, n_2 Gegenstände der Sorte 2 usw. und n_k Gegenstände der Sorte k vorhanden; es git also $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Man spricht hier von *Permutationen mit Wiederholung*.

Beispiel. In Timos Klasse gibt es 17 Jungen und 4 Mädchen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Jungen und Mädchen in einer Reihe aufzustellen, wenn es dabei nur um die Zugehörigkeit zu den Jungen bzw. Mädchen geht. Lösung. Hier ist $n_1 = 17$ und $n_2 = 4$, also ist die Anzahl gleich $21!/(17!4!) = 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18)/24$.

Teilbarkeit

Teilbarkeitsregeln

Wir wiederholten die bekannten Teilbarkeitsregeln für 2 bis 10. Für eine $k$stellige Dezimalzahl $n = [a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0]_{10}$ mit den Ziffern $a_k, a_{k-1}, \cdots a_0$ ist die *Quersumme* gleich $Q(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$. Die *alternierende Quersumme* $A(n)$ ist die abwechselnde Summe und Differenz der Ziffern:

$$A(n) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k.$$

Dabei beginnt man mit den Einern, subtrahiert die Zehner, addiert die Hunderter usw. Bsp. $A(62891) = 1-9+8-2+6 = 4$, $A(121) = 1-2+1 = 0$, $A(100) = 0-0+1$.

Elferregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 11 denselben Rest wie ihre alternierende Quersumme $A(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 11 teilbar, wenn $A(n)$ durch 11 teilbar ist.

Neunerregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme $Q(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 9 teilbar ist.

Dreierregel: Jede natürliche Zahl n lässt bei Division durch 3 denselben Rest wie ihre Quersumme $Q(n)$. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 teilbar ist.

Beispiele: Es gilt $62891 : 11 = 5717$ Rest 4. Auch $A(62891) = 4$ lässt bei Division durch 11 den Rest 4. $A(121) = 0$, also ist 121 durch 11 teilbar. $Q(100) = 1$, also lässt 100 bei Division durch 9 den Rest 1.

Primzahlen und Potenzen

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern. Die Zahl 1 hat nur einen Teiler und ist somit keine Primzahl; alle anderen Nicht-Primzahlen haben 3 oder mehr Teiler.

Hauptsatz der Zahlentheorie. Jede natürliche Zahl hat eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen. Für jede natürliche Zahl n ist die Zerlegung in Primfaktorpotenzen eindeutig, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

Wir ermitteln die eindeutige Primfaktorzerlegungen $1024 = 2^{10}$ und

$$\begin{aligned} 15! &= 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1. \end{aligned}$$

Anzahl der Teiler

Eine Primzahl p hat genau 2 Teiler. Eine Primzahlpotenz p^n hat als Teiler die Zahlen

$$1, p, p^2, p^3, \ldots, p^{n-1}, p^n.$$

Dies sind genau $n+1$ Zahlen. Wir schreiben für die Menge der Teiler von n das Symbol $T(n)$ und für die Anzahl der Teiler von n das Symbol $t(n)$. Bsp. $t(2^{10}) = 11$, $T(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, $t(36) = 9$. Wie sieht die Teilermenge von $2 \cdot 3^6$ aus?

$$T(2 \cdot 3^6) = \{1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, \quad 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, \ldots, 2 \cdot 3^6\}, \quad t(2 \cdot 3^6) = 2 \cdot 7 = 14.$$

Jeder Teiler von 2 wird also mit jedem Teiler von 3^6 kombiniert; allgemein $t(2^m \cdot 3^n) = (m+1)(n+1)$. Die Anzahl der Teiler von $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ ist gleich

$$t(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

Also gilt

$$t(15!) = (11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^2.$$

Wir üben das quadrieren und Wurzelziehen mit Hilfe der Primfaktorzerlegung: Exponenten werden verdoppelt bzw. halbiert. Welches ist die kleinste natürliche Zahl x, sodass $15! \cdot x$ eine Quadratzahl ist? Die ungeraden Primzahlexponenten müssen ausgeglichen werden, also muss gelten $x = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$.

Quadratzahlen haben nur *gerade* Exponenten. Also ist die Anzahl der Teiler einer Quadratzahl das Produkt von lauter ungeraden Zahlen (um 1 erhöhte gerade Zahlen). Bsp $36 = 2^2 3^2$

hat $(2+1)(2+1)=9$ Teiler. Hat umgekehrt eine natürliche Zahl eine *ungerade* Anzahl von Teilern, dann ist sie Quadratzahl. Da kann man sich auch anders über die Beziehung von Teiler und Komplementärteiler überlegen: Ist t Teiler von n, so ist n/t der Komplementärteiler von n. Ist n keine Quadratzahl, so sind t und n/t stets verschieden, treten also paarwise auf, also ist die Teileranzahl gerade. Im Quadratzahlfall ist die Wurzel w von n zu sich selbt komplementär, $w=n/w$.

Pause: Rasende Roboter.