Korrespondenz-Seminar der LSGM 2011/12

Klasse 7, 3. Treffen am 13. April 2013

Zuerst wurden die Aufgaben des Känguruwettbewerbs 2013 durchgesprochen. Bei der Aufgabe 'Kreisverkehr mit 4 Autos' wurde der Begriff der Permutatiuon von 4 Elementen eingeführt und es wurde die 9 möglichen Permutationen aufgeschrieben

1	2	3	4
2	3	4	1
2	4	1	3
2	1	4	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

Die Zyklenschreibweise wird erklärt, etwa ist $2\ 3\ 4\ 1 = (1234)$ und $2\ 1\ 4\ 3 = (12)(34)$. Damit kommen alle 6 Viererzyklen und alle 3 Doppelzweierzyklen in Frage.

Es werden Gleichungssysteme betrachtet, die zur Lösung führen; Gaußsumme $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ wird hergeleitet und bei einer Känguruaufgabe angewandt: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+11 = 11*12/2-10 = 66-10 = 56$.

Serie 5, Aufgabe 3, wird gerechnet, einmal ohne und am Ende mit Kongruenzen: $p = 3q+1$; dann gilt $p^2+2 = (3q+1)^2+2 = 9q^2+6q+1+2 = 3(3q^2+2q+1)$ und dies ist durch 3 teilbar.

Pause: Rasende Roboter.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Welche Reste treten bei Division durch 3 auf, natürlich 0, 1 und 2. Alle ganzen Zahlen, die denselben Rest lassen fassen wir zu einer *Restklasse* zusammen:

$$[0]_3 = \{0,3,6,9,-3,-6,-9,-12,\dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$
$$[1]_3 = \{1,4,7,10,13,-2,-5,-8,\dots\} = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\},$$
$$[2]_3 = \{2,5,8,11,-1,-4,-7,\dots\} = \{3n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Zahlen, die in derselben Klasse liegen heißen *zueinander kongruent modulo 3.* Wir schreiben

$$0 \equiv 3 \pmod 3, \quad 7 \equiv -8 \pmod 3, \quad 5 \equiv -7 \pmod 3.$$

Bei der Division durch 2 gibt es nur zwei Restklassen, 0 und 1. Die Restklasse $[0]_2$ der durch 2 teilbaren Zahlen ist die Menge der geraden Zahlen und die Restklasse $[1]_2$ ist die Menge der ungeraden Zahlen.

Nun kann man an Stelle von 2 oder 3 einen beliebigen *Modul* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ betrachten. Das führt zu folgender allgemeinen Definition:

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* m, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a-b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q \in \mathbb{Z} \colon a = qm + b$.

Wir schreiben $a \equiv b \pmod{m}$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m".

Spezialfall: $b = 0$. $a \equiv 0 \pmod{m}$ bedeutet nach Bedingung 2. $m \mid a$.

Beispiele:

$$12345 \equiv 54321 \pmod{3}, \quad 91 \equiv 35 \pmod{7}, \quad 123456 \equiv 6 \pmod{10}, \quad 123456 \equiv 56 \pmod{100},$$
$$2010 \equiv -3 \pmod{11}, \quad 2011 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Spezialfälle: $m = 10$ und $m = 100$. Zwei (natürliche) Dezimalzahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie auf dieselbe Ziffer enden. Zwei Dezimalzahlen sind kongruent modulo 100, wenn ihre letzten beiden Ziffern übereinstimmen.

Wir erwähnen drei weitere Spezialfälle: Die Teilbarkeitsregekn für 9, 3 und 11. Bezeichnet man mit $Q(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl n und mit $A(n)$ deren alternierende Quersumme, begonnen mit der Einerziffer: $A(123456) = 6-5+4-3+2-1 = 3$, $Q(123456) = 1+2+3+4+5+6 = 21$, dann gilt

$$n \equiv Q(n) \pmod{9}, \quad n \equiv Q(n) \pmod{3}, \quad n \equiv A(n) \pmod{11}.$$

Die Neunerregel wird hergeleitet anhand der Dezimaldarstellung einer 4stelliigen Zahl:

$$1234 = 1000 + 200 + 30 + 4 = 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Kongruenzen können potenziert werden, also gilt $10 \equiv 1 \pmod{9}$ und daher $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{9}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} 1234 &= 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \\ &\equiv 1 + 2 + 3 + 4 = Q(1234) \pmod{9} \end{aligned}$$

Beispiele (noch offen):

$$12345678910 \equiv Q(12345678910) \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 \equiv 55 \equiv Q(55) \equiv 10 \equiv Q(10) \equiv 1 \pmod{10}.$$

$$\begin{aligned} 5^n \equiv 5 \pmod{10}, \quad 6^n \equiv 6 \pmod{10}, \quad 1^n \equiv 1 \pmod{10}, \quad 0^n \equiv 0 \pmod{10} \\ 4^n \equiv 4, 6 \pmod{10}, \quad 9^n \equiv 9, 1 \pmod{10} \\ 2^n \equiv 2, 4, 8, 6 \pmod{10}, \quad 3^n \equiv 3, 9, 7, 1 \pmod{10}, \quad 7^n \equiv 7, 9, 3, 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Kongruenzen

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität: Für alle ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a \equiv a \pmod{m},$$
$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m},$$
$$a \equiv b \pmod{m}, \quad b \equiv c \pmod{m} \Longrightarrow a \equiv c \pmod{m}.$$

Rechnen mit Kongruenzen

Kongruenzen können wie Gleichungen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden. Genauer, wenn $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$, dann gilt auch

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$
$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$
$$ac \equiv bd \pmod{m}$$
$$a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

Hierbei ist n eine beliebige natürliche Zahl.

Es gibt 2 Möglichkeiten, eine Kongruenz zu *dividieren*

a) $an \equiv bn \pmod{mn}$. Dann folgt $a \equiv b \pmod{m}$.
b) Wenn $an \equiv bn \pmod{m}$ und n, m sind teilerfremd, also $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$, dann gilt auch $a \equiv b \pmod{m}$.

Berechne! (offen)

1) $123 \cdot 456 \cdot 789 \pmod{9}$.
2) $2^{100} \pmod{7}$. Hinweis: Bestimme zunächst die Reste von $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ und versuche eine Regelmäßigkeit festzustellen.
3) $44^{44} \cdot 55^{55} \cdot 66^{66} \pmod{10}$
4) $87^{432} + 45^{17} \pmod{11}$