Korrespondenz-Seminar der LSGM 2012/13

Klasse 7, 2. Treffen am 5. Januar 2013

Wiederholung: Anzahl der Teiler

Die Anzahl der Teiler einer Zahl ermittelt man mit Hilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung, etwa für $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ hat man $(a+1)(b+1)(c+1)$ Teiler. Daher hat $900 = 3 \cdot 3 \cdot 100 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ genau $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Teiler.

Aufgabe 1: Auf wie viele Nullen endet $n = 30! = 30 \cdot 29 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$? Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man das Produkt $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ als „n-Fakultät". Es ist $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$.

Wir ermitteln, wie oft der Faktor 2 und wie oft der Faktor 5 in der Zahl $n = 30!$ enthalten ist:

$$\left[\frac{30}{2}\right] + \left[\frac{30}{4}\right] + \left[\frac{30}{8}\right] + \left[\frac{30}{16}\right] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26,$$

dabei ist $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist (ganzzahliger Teil), also $[3,14] = 3$, $[-2,5] = -3$, $[5] = 5$. Also ist $30! = 2^{26} \cdot q$. Analog berechnet man die Anzahl der Faktoren 5:

$$\left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{25}\right] = 6 + 1 = 7.$$

Also ist $30! = 2^{26} \cdot 5^7 \cdot q_1$.

Gemischte Aufgaben

1. Auf wie viele Nullen endet $31! = 31 \cdot 30 \cdots 2 \cdot 1$, d.h. wie viele Primfaktoren 5 enthält das Produkt? A: 7.

2. Ein Quadrat der Fläche 196 hat welchen Umfang? A. 56

3. Jemand hat 11 rote, 12 braune und 13 schwarze Sochen in einem Beutel. Wie viele Socken muss er blind aus dem Beutel ziehen, damit er mit Sicherheit ein schwarzes Paar Socken hat? A: 25

4. Bei einem Quadrat sind die beiden Diagonalen eingezeichnet und die benachbarten Seitenmitten wurden miteinander verbunden. Wie viele Dreiecke enthält die entstandene Figur? A: 20.

5. Bei einem Quadrat sind die beiden Diagonalen eingezeichnet und die benachbarten Seitenmitten wurden miteinander verbunden. Wie viele Vierecke enthält die entstandene Figur? A: 38.

6. Wie viele A4-Blätter benötigt man, um ein A0-Blatt zu überdecken? A: 16.

7. Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen $8 \cdot 93$ und $9 \cdot 82$? A: 5.

Pause: Rasende Roboter.

Textaufgaben, Variablen, Gleichungen

Wir wiederholen die Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac, \quad (a+b)c = ac+bc \\ a(b-c) &= ab-bc, \quad (a-b)c = ac-bc. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Vor 10 Jahren war ein Vater 5 Mal so alt wie sein Sohn. In 5 Jahren werden beide zusammen 60 Jahre alt sein.
Wie alt sind Vater und Sohn heute?

Lösung. Wir führen für das heutige Alter von Vater bzw. Sohn die Variablen v bzw. s ein. Dann lässt sich die Aussagen wie folgt als Gleichung formulieren:

$$v - 10 = 5(s - 10) \tag{1}$$

$$(v+5)+(s+5) = 60 \tag{2}$$

Mit Hilfe des Distributivgesetztes vereinfacht sich die erste Gleichung zu $v - 10 = 5s - 50$. Addiert man auf beiden Seiten 10, so hat man $v = 5s - 40$. Setzt man dies in (1) ein, so hat man

$$\begin{aligned} (5s-40+5)+s+5 &= 60 \\ 6s-30 &= 60 \quad |+30 \\ 6s &= 90 \quad |:6 \\ s &= 15. \end{aligned}$$

Setz man dies in $v = 5s - 40$ ein, so hat man $v = 35$. Die Probe am Text bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Termumformungen am Beispiel der Papierformate von A0 bis A4

Wir wollen das Seitenverhältnis eines A4-Blattes bestimmen. Es seien a und b die längere bzw. kürzere Seite des A4-Rechtecks. Man erhält dann das A3-Rechteck, indem man die kleinere Seite verdoppelt (die dann zur größeren Seite wird) und die Größere Seite beibehält (die dann zur kleineren Seite wird). Dann sind $2b$ und a die längere bzw. kürzere Seite des Rechtecks A3. Die zweite wichtige Bemerkung ist, dass alle Rechtecke A0, A1 usw. zueinander *ähnlich* sind. Das heißt, dass das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite immer gleich ist. Also gilt: $a : b = 2b : a$.

$$a : b = 2b : a.$$

Dies formen wir nun um, um das Verhältnis $\frac{a}{b}$ explizit zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{b}{\frac{a}{2}} \quad |\cdot b \\
\frac{a}{b}\,b &= \frac{b}{\frac{a}{2}}\,b \\
a &= \frac{b\cdot b}{\frac{a}{2}} \quad |\cdot\frac{a}{2} \\
a\cdot\frac{a}{2} &= b^2 \\
\frac{a^2}{2} &= b^2 \quad |\cdot 2 : b^2 \\
\frac{a^2}{b^2} &= 2 \\
\left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2 \quad |\sqrt{} \\
\frac{a}{b} &= \sqrt{2} \approx 1,4142.
\end{aligned}$$

Tatsächlich ergeben die Messungen der Seitenlängen eines A4 Blattes $21,0\,\mathrm{cm}$ bzw $29,7\,\mathrm{cm}$, was ungefähr dem Verhältnis $\sqrt{2}$ entspricht.

Wir bestimmen nun die Seitenlängen des A0-Blattes. Hier gilt einerseits $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ und außerdem $ab = 1\,\mathrm{m}^2$. Setzt man $a = b\sqrt{2}$ in die zweite Gleichung ein, so hat man $b\sqrt{2}\cdot b = 1$ also $b^2 = 1/\sqrt{2}$. Zieht man hier noch einmal die Wurzel, so hat man $b = 1/\sqrt{\sqrt{2}} = 0,841$ und $a = 1,19$ (Angaben in m). Geometrisch erhält man dasselbe Resultat, wenn man die Seitenlängen des A4-Blattes beide vervierfacht, also $a = 4\cdot 29,7\,\mathrm{cm} = 1,188\,\mathrm{m}$ und $b = 4\cdot 21,0\,\mathrm{cm} = 0,84\,\mathrm{m}$.

Für das A4-Blatt erhält man $a_4 = \sqrt[4]{2}/4 = 0,2973\ldots$ und für die kleinere Seite $b_4 = a_4/\sqrt{2} = 0,2102\ldots$.