Korrespondenz-Seminar der LSGM 2012/13

Klasse 7, Treff 1 am 10. November 2012

Es waren 3 Schüler anwesend, Anne, Philipp und Janis.

Fakultät und Teilerzahl

Zuerst wurde das Symbol $n!$ geklärt und gezeigt, dass es $n!$ verschiedene Anordnungen von n verschiedenen gegenständen gibt; $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$. Es wurde $10! = 10\cdot 9\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ berechnet und die eindeutige Primfaktorzerlegung bestimmt.

Für jede natürliche Zahl n ist die Zerlegung in Primfaktorpotenzen eindeutig, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Die Anzahl der Teiler von n ist gleich $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_r+1)$. Wir starteten mit der Anzahl der Teiler von 2^8. Dies sind $2^8, 2^7, \dots, 2^1, 1$, also 9 Stück. Hat man $m = 2^8\cdot 3^5$, so hat der erste Faktor 9 und der zweite Faktor 6 Teiler, die alle miteinander kombiniert werden können, also hat m genau $9\cdot 6$ Teiler.

Wir üben das quadrieren und Wurzelziehen mit Hilfe der Primfaktorzerlegung: Exponenten werden verdoppelt bzw. halbiert. Quadratzahlen haben nur *gerade* Exponenten. Also ist die Anzahl der Teiler einer Quadratzahl das Produkt von lauter ungeraden Zahlen (um 1 erhöhte gerade Zahlen). Bsp $36 = 2^2 3^2$ hat $(2+1)(2+1) = 9$ Teiler. Hat umgekehrt eine natürliche Zahl eine *ungerade* Anzahl von Teilern, dann ist sie Quadratzahl. Da kann man sich auch anders über die Beuziehung von Teiler und Komplementärteiler überlegen: Ist t Teiler von n, so ist n/t der Komplementärteiler von n. Ist n keine Quadratzahl, so sind t und n/t stets verschieden, treten also paarwise auf, also ist die Teileranzahl gerade. Im Quadratzahlfall ist die Wurzel w von n zu sich selbt komplementär, $w = n/w$.

Pause: Rasende Roboter.

Teilbarkeit

Wir wiederholen die Teilbarkeitsregeln zur 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Wir definieren die *Quersumme* $Q(n)$ als Summe der Ziffern von n und die *alternierende Quersumme* $A(n)$, wo die Ziffern von n, beginnend mit der Einerziffer abwechselnd addiert und subtrahiert werden: $A(9876) = 6-7+8-9 = -2$ und $A([abcabc]_{10}) = c-b+a-c+b-a = 0$. Die Symbole $\exists$ (es existiert ein) und $\forall$ (für alle) werden eingeführt. Die Zahlenbereichssymbole werden wiederholt: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$. Die Teilbarkeitsregelnlauten dann:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid Q(n).$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : 9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid Q(n).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid A(n).$$

Aufgabe 1 Bestimme alle 6-stellige Zahlen n der Form $n = 123x56$ (mit Ziffern $x \in \{0, 1, \dots, 9\}$), die a) durch 9 b) durch 11 c) 99 teilbar sind.

Lösung für a) , b) und c) ist $x = 1$

Aufgabe 2 Bestimme alle 5-stellige Zahlen n der Form $n = 98ab5$ (mit Ziffern a, $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$), die a) durch 9 b) durch 11 c) 99 teilbar sind.

Lösung: a) Berechne zunächst die Quersumme von n, $Q(n) = 9+8+a+b+5 = 22+n$. Wegen $0 \le a+b \le 18$ kommt für die Quersumme nur die nächst und übernächste durch 9 teilbare Zahlen in Frage: 27 und 36:
Fall 1: $Q(n) = 22+a+b = 27$, also $a+b = 5$ (6 Lösungen), Fall 2: $Q(n) = 22+a+b = 36$, also $a+b = 14$ (5 Lösungen).
b) Berechne die alternierende Quersumme $A(n) = 5-b+a-8+9 = 6-b+a$. Auch hier kommen 2 Fälle in Frage $A(n) = 0$ oder $A(n) = 11$.
c) Es gibt genau eine gemeinsame Lösung von a) und b), nämlich $a = 5$, $b = 0$, also $n = 98505$.

Wir behandeln und beweisen die Teilbarkeitsregel für die 7: Es gilt $7 \mid 10A + a$ genau dann, wenn $7 \mid A - 2a$. Übersetzt heißt das: Spalte von einer natürlichen Zahl $[Aa]_{10}$ die Einerziffer a ab, verdopple sie und ziehe sie vom „Vorderteil“ A ab. Wenn diese Zahl durch 7 teilbar ist, so war auch die Ausgangszahl durch 7 teilbar. Beispiel: $n = 91$. Spalte 1 ab, verdopple 2 und ziehe dies vom Vorderteil 9 ab, also $9-2 = 7$. Dies ist durch 7 teilbar, also ist auch 91 durch 7 teilbar.

Größter gemeinsamer Teiler und Euklidischer Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus bestimmt zu zwei gegebenen natürlichen Zahlen a und b deren größten gemeinsamen Teiler, $\mathrm{ggT}(a, b)$. Wenn $a > b$, dann folgt

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a-b, b).$$

Das Wesentliche der obigen Gleichung ist, dass die größere der beiden Zahlen, nämlich a, auf der rechten Seite nicht mehr auftritt und durch die kleinere Zahl $a-b$ ersetzt wurde. Diese Subtraktion von b kann man nun so lange fortführen bis man b nicht mehr abziehen kann:

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a-b, b) = \mathrm{ggT}(a-2b, b) = \cdots = \mathrm{ggT}(a-qb, b) = \mathrm{ggT}(r, b), \quad a-qb = r < b$$

Nun kann man genauso verfahren und r so lange von b abziehen bis es nicht weiter geht und $b - q_1 r < r$. Diese Verfahren bricht irgendwann ab mit zwei Zahlen $(0, d)$. Dann ist $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Anstelle der fortgesetzten Subtraktion der jeweils kleineren Zahl, kann man auch gleich eine Division mit Rest durchführen. Dieses Verfahren ist im „Arbeitsmaterial“, Abschnitt 3.1 erläutert.