Korrespondenz-Seminar der LSGM 2011/12

Klasse 7, Treff 4 am 9. Juni 2012

Vor dem Klaus-Spiel wurde eine geografische Frage erörtert: Ein Mann geht 5 km nach Süden, dann 5 km nach Osten und dann 5 km nach Norden. Nach dieser 15 km-Tour befindet er sich wieder am Ausgangsfleck.
Wo steht der Mann?

Man kommt leicht darauf, dass er am Nordpol stehen kann, aber auch in der Nähe des Südpols gibt es Punkte, für die das zutrifft. Insbesondere gibt es eine ganze Reihe von Breitenkreisen vom Umfang $5\,\mathrm{km}/n$ mit einer natürlichen Zahl n, bei denen Anfangspunkt und Endpunkt der zweiten Teilstrecke (nach Osten) gleich sind. Dabei wird der Südpol praktisch n Mal umrundet in immer engeren Kreisen.

Zur Klausaufgabe 2 passt der Satz über das arithmetische und geometrische Mittel

$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \text{(AGM).}}$$

Sind a und b die Seiten des Rechtecks mit gegebenem festen Umfang u, also $u = 2(a+b)$, dann ist $F = ab$ seine Fläche. Nach der AGM-Ungleichung gilt also $(u/4)^2 \geq F$, wobei Gleichheit nur eintritt, wenn $a = b = u/4$ gilt. Also ist die Fläche maximal 25, wenn der Umfang 20 ist.

Erweitert man die Klasse der zulässigen ebenen Figuren von gegebenem festen Umfang, so ist der **Kreis** die Figur mit der größten Fläche; in unserem Fall mit $u = 20$ ist $F = 100/\pi$ die Kreisfläche mit diesem Umfang.

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgabe:

1) $999 : 37 = 27$
2) Ein Rechteck hat den Umfang 20 cm. Was ist die maximale Fläche dieses Rechtecks? $25\,\mathrm{cm}^2$
3) Auf wie viele Nullen endet 51!? Auf 12 Nullen.
4) $(5+10+15+20+\cdots+100)/10 = 105$.
5) Welchen Rest lässt 123456789 bei Division durch 9? 0.
6) Wie oft muss man ein Stück Papier (Dicke = 0,1mm) falten, damit die Dicke von der Erde bis zum Mond reicht (Abstand = 400000 km)? Etwa 42 Mal.
7) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$.

8) $571428 : 142857$ ist ganzzahlig. Wie groß ist der Quotient? 4.
9) Ein Dreieck hat die Seitenlängen 3,4 und 5. Wie groß ist seine Fläche? 6.
10) Jemand hat 10 rechte weiße, 11 linke weiße, 12 rechte schwarze, 13 linke schwarze Handschuhe. Wie oft muss man ziehen damit man mindestens ein passendes Paar erhält? 25. Wie oft muss man ziehen um mit Sicherheit ein weißes Paar zu erhalten? 37.

Bei Aufgabe 9 wurde die HERONsche Dreiecksformel genannt, $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei $s = (a+b+c)/2$. Nach der Umkehrung des Pythagoras ist das Dreieck wegen $5^2 = 3^2+4^2$ rechtwinklig mit den Katheten 3 und 4. Also gilt $F = 3 \cdot 4/2 = 6$.

Bei Aufgabe 5 und auch weiter unten wird die GAUSSsche Summenformel benötigt:

$$\boxed{1+2+\cdots(n-1)+n = \frac{1}{2}n(n+1).} \tag{1}$$

Gleichungen

Aufgabe 1 Es ist 12 Uhr. Wann bilden Minuten- und Stundenzeiger das nächtes Mal einen Winkel von 60°

Lösung: Wir bezeinen die Zeit in Minuten mit t und den entsprechenden Winkel des Minutenzeigers nach der Zeit t mit α und den Winkel des Stundenzeigers zur 12 mit β. Gesucht ist t mit $\alpha - \beta = 60°$. Wir müssen α und β durch t ausdrücken. Beim Minutenzeiger entsprechen 5 min einem Winkel von 30°, also $\alpha = 6t$ (ohne Gradeinheit). Der Stundenzeiger ist 12-Mal langsamer als der Minutenzeiger, also gilt $\beta = \alpha/12 = t/2$. Die gesuchte Beziehung ist also $\alpha - \beta = 6t - t/2 = 60$ bzw. $11t/2 = 60$, $t = 120/11$. Nach 10 Minuten und 55 Sekunden bilden die Zeiger einen Winkel von 60°.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Wir wiederholen den Begriff der Zahlenkongruenzen $a \equiv b \pmod{m}$. Wir wiederholen die Teilbarkeitsregeln für 9 und die 11 und formulieren sie mit Kongruenzen:

$$\boxed{n \equiv Q(n) \pmod 3, \quad n \equiv Q(n) \pmod 9, \quad n \equiv A(n) \pmod{11}.}$$

Dabei ist $Q(n)$ die Quersumme und $A(n)$ die alternierende Quersumme von n. Wir beweisen die Neuner- und die Elferregel, wobei wir die Dezimaldarstellung einer vierstelligen Zahl benutzen $[abcd]_{10} = 1000a + 100b + 10c + d$. Dann ist $Q(n) = a+b+c+d$ und $A(n) = d-c+b-a$. Wegen $10^n \equiv (-1)^n \equiv \pm 1 \pmod{11}$ ergibt sich hieraus die Elferregel. Wegen $10^m \equiv 1^m \equiv 1 \pmod 9$ ergibt sich die Neunerregel.

Aufgabe 2 Bestimme die Quersumme der Quersumme der Quersumme, das ist der Neunerrest, von $z = 1234567891011\ldots201020112012$ und von $y = 123\ldots7777777$.

Lösung: Wir bestimmen zunächst den Neunerrest von z durch geschicktes „Zerhacken“ der Zahl in Blöcke und berechnen die Quersumme der Blöcke:

$$\begin{aligned} Q(z) &\equiv 1+2+3+\cdots 2011+2012 = \frac{1}{2}2012\cdot 2013 \equiv 1006\cdot 2013 \equiv Q(1006)Q(2013) \pmod 9 \\ &\equiv 7\cdot 6 \equiv 42 \equiv Q(42) \equiv 6 \pmod 9. \end{aligned}$$

In der Tat ist die Quersumme der Quersumme der Quersumme von z einstellig, wie man durch die folgende Abschätzung sieht:

$$Q(z) \leq 1+2++\cdots 2011+2012 = 2025078.$$

Also ist $Q(Q(z)) \leq Q(1999999) = 46$ und somit $Q(Q(Q(z))) \leq 13$.
Analog zur vorigen Lösung ist

$$\begin{aligned} y &\equiv 1+2+\cdots+7777777 \equiv \frac{1}{2}7777777 \cdot 7777778 \equiv \frac{1}{2}Q(7777777)Q(7777778) \pmod 9 \\ &\equiv \frac{1}{2}7 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 7+1) \equiv \frac{1}{2}(-2)(-2)5 \equiv 10 \equiv 1 \pmod 9. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Bestimme die letzte Ziffer von $z = 2^{100} \cdot 3^{201} \cdot 4^{302}$ und die letzten beiden Ziffern von $7^{7^{7^7}}$.

Lösung: Wir sehen, dass die Restefolgen periodisch werden und bestimmen diese Periode für $2^m, 3^m, 4^m$ modulo 10 und für 7^m modulo 100. In allen Fällen bis auf 4^m, Periode 2, ist die Periodenlänge gleich 4. Wir haben

$$\begin{aligned} 3^0 &\equiv 1 \pmod{10} \quad & 3^1 &\equiv 3 \pmod{10}, \\ 3^2 &\equiv 9 \pmod{10} \quad & 3^3 &\equiv 7 \pmod{10}. \end{aligned}$$

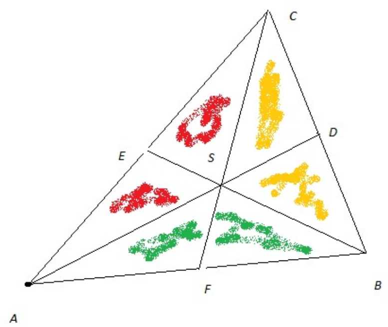
Daraus ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 3^{4n} &\equiv 1 \pmod{10} \quad & 3^{4n+1} &\equiv 3 \pmod{10}, \\ 3^{4n+2} &\equiv 9 \pmod{10} \quad & 3^{4n+3} &\equiv 7 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Wegen $201 \equiv 1 \pmod 4$ ist also $3^{201} \equiv 3 \pmod{10}$.

Die Seitenhalbierenden

Bekanntlich schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt, den Schwerpunkt des Dreiecks. Dabei entstehen 6 kleine Teildreiecke.



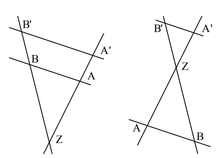
Wir zeigen, dass diese sechs Teildreiecke flächengleich sind.Zunächst erkennt man, dass die beiden grünen, die beiden gelben und die beiden roten Dreiecke paarweise flächengleich sind, da sie dieselbe Grundseite (jeweils die halbe Dreiecksseite) und dieselbe Höhe haben.

Schließlich haben die Dreiecke AFC und BFC aus demselben Grunde gleiche Flächen, nämlich den halben Flächeninhalt des ganzen Dreiecks. Damit sind die zwei roten Dreiecke mit einem grünen flächengleich zu zwei gelben Dreiecken und einem grünen. Damit sind rote und gelbe Dreiecke flächengleich. Analog zeigt man, dass die roten und grünen Dreiecke flächengleich sind.

Folgerung: Der Schnittpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.

Dies folgt sofort aus dem Fakt, dass Dreieck ASC die doppelte Fläche wie Dreieck DSC hat, bei gleicher Höhe von C.

Die Strahlensätze



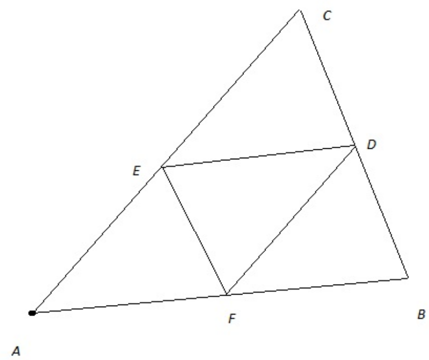
Werden zwei durch Z verlaufende Strahlen durch zwei parallele Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl (1. Strahlensatz). Es gilt also

$$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'}. \tag{2}$$

Es gilt auch die Umkehrung: Gilt für fünf Punkte A, A', B, B' und Z die obige Gleichung (2), dann sind die Geraden AB und $A'B'$ zueinander parallel.

Das Mittendreieck

Verbindet man die Mitten D, E und E eines Dreiecks ABC, so wird das Dreieck ABC dadurch in 4 kongruente Teildreiecke zerlegt. Jedes dieser Teildreiecke ist ähnlich zum Ausgangsdreieck ABC und hat ein Viertel seines Flächeninhalts. Seine Seiten sind parallel zu den Seiten von $\triangle ABC$ und halb so lang wie diese. Haben die Seitenlängen von zwei ähnlichen Dreiecken das Verhältis q, so haben die Flächen das Verhältnis q^2.



Die Seitenverhältnisse sind $\overline{CD} : \overline{DB} = \overline{CE} : \overline{EA} = 1 : 1$. Damit sind AB und DE zueinander parallel (nach Umkehrung des Strahlensatzes). Es folgt weiter, dass die 4 Teildreiecke alle untereinander kongruent sind (etwa mit Stufenwinkelsatz und dem Kongruenzsatz WSW).