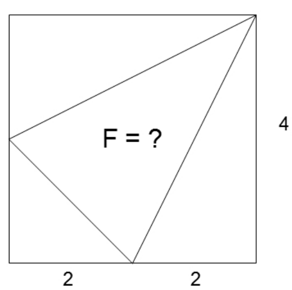
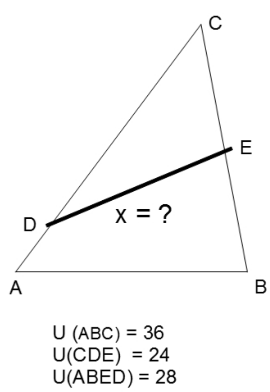
# Korrespondenz-Seminar der LSGM 2011/2012

# Klasse 7, Treffen 3, 24. März 2012

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgabe:




**Aufgabe 1** Gegeben sei ein Quadrat der Seitenlänge 4. Bestimme die Fläche des einbeschriebenen Dreiecks: 6. Bestimme die Länge $x$ der Strecke $\overline{ED}$, wenn der Umfang des großen Dreiecks $ABC$ 36 ist, der des kleinen Dreiecks $CDE$ gleich 24 und der des Vierecks $ABED$ gleich 28. Lösung: $x = 8$.

1) Wie oft lässt sich 50! ohne Rest durch 7 teilen? Antw. $[50/7]+[50/49] = 7+1 = 8$ Mal.
2) Berechne $23^2 = 529$ und $27^2 = 729$. Ist es Zufall, dass die Differenz 200 ist?
3) Drei Spielwürfel stehen übereinander. Die Summe der Augenzahlen der beiden direkt aufeinanderliegenden verdeckten Seiten ist jeweils 6. Ganz oben ist eine 6 zu sehen. Welche Augenzahl zeigt nach unten zum Tisch? 3.
4) $1+3+5+\cdots+97+99 = 2500$
5) $1+2-3-4+5+6-\cdots+98-99-100 = -100$.
6) Ein Würfel hat das Volumen $64\,\text{cm}^3$. Wie groß ist die Summe seiner Kantenlängen? $48\,\text{cm}$.

## Binomische Formeln

Mit der Klausaufgabe 2 wurden die drei binomischen Formeln eingeführt:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2} \quad \textbf{1. binomische Formel} \tag{1}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2} \quad \textbf{2. binomische Formel} \tag{2}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2} \quad \textbf{3. binomische Formel}. \tag{3}$$

Analog zu Klausaufgabe 2 wurden die Quadratzahlpaare $21^2 = 441$, $29^2 = 841$, $22^2 = 484$, $28^2 = 784$, $24^2 = 576$, $26^2 = 676$ betrachtet, deren Differenz jeweils gleich $100n$ ist, wobei $n = 21-a$ und $a = 21, 22, 23, 24$. Wir setzten $a = 29$ und $b = 21$ in die 3. binomische Formel ein und erkennen, $29^2 - 21^2 = (29+21)(29-21) = 50 \cdot 8 = 400$. Der Hauptgrund für diese Eigenschaft ist also, dass die Summe der beiden Zahlen stets 50 ist.

Wir wiederholen das Distibutivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ und erweitern es durch ersetzen von $a := a+d$ auf $(a+d)(b+c) = (a+d)b+(a+d)c = ab+db+ac+dc$. Mit Hilfe der letzten Formel beweisen wir die drei binomischen Formeln, indem wir einsetzen $d := b$ und $c := a$ bzw. $c := a$ und $d := -b$. Die zweite binomische Formel leiten wir aus der ersten her durch Einsetzen von $b := -b$.

Wir vereinfachen den folgenden Term durch Anwenden der binomischen Formeln

$$\left(\frac{x-y}{3x-2y} - \frac{x-y}{3x+2y}\right) : \frac{6y^2-6x^2}{9x^2-4y^2}.$$

## Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Wir wiederholen den Begriff der Zahlenkongruenzen $a \equiv b \pmod{m}$ und lösen damit die Aufgabe 1, Serie 5. Wir wiederholen die Teilbarkeitsregeln für die 3, die 9 und die 11 und formulieren sie mit Kongruenzen:

$$\boxed{n \equiv Q(n) \pmod{3}, \quad n \equiv Q(n) \pmod{9}, \quad n \equiv A(n) \pmod{11}.}$$

Dabei ist $Q(n)$ die Quersumme und $A(n)$ die alternierende Quersumme von $n$. Wir beweisen die Neuner- und die Elferregel, wobei wir die Dezimaldarstellung einer vierstelligen Zahl benutzen $[abcd]_{10} = 1000a + 100b + 10c + d$. Dann ist $Q(n) = a+b+c+d$ und $A(n) = d-c+b-a$. Wegen $10^n \equiv (-1)^n \equiv \pm 1 \pmod{11}$ ergibt sich hieraus die Elferregel. Wegen $10^m \equiv 1^m \equiv 1 \pmod{9}$ ergibt sich die Neunerregel.

**Aufgabe 2** Bestimme die Quersumme der Quersumme der Quersumme von $z = 1234567891011\ldots201020112012$.

*Lösung*: Wir bestimmen zunächst den Neunerrest von $z$ durch geschicktes „Zerhacken“ der Zahl in Blöcke und Berechnen der Quersumme der Blöcke:

$$\begin{aligned} Q(z) &\equiv 1+2+3+\cdots 2011+2012 = \frac{1}{2}2012 \cdot 2013 \equiv 1006 \cdot 2013 \equiv Q(1006)Q(2013) \pmod{9} \\ &\equiv 7 \cdot 6 \equiv 42 \equiv Q(42) \equiv 6 \pmod{9}. \end{aligned}$$

In der Tat ist die Quersunmme der Quersumme der Quersumme von $z$ einstellig, wie man durch die folgende Abschätzung sieht:

$$Q(z) \leq 1+2++\cdots 2011+2012 = 2025078.$$

Also ist $Q(Q(z)) \leq Q(1999999) = 46$ und somit $Q(Q(Q(z))) \leq 13$.

## Dreieckskonstruktionen

Wir wiederholen die 4 Kongruenzsätze, die zur eindeutigen Konstruktion von Dreiecken benutzt werden. Wir wiederholen, wie man nur mit Zirkel und Lineal die Parallele zu einer gegebenen Geraden $g$ im vorgegebenen Abstand $h = \overline{PQ}$ konstruiert:

1. Errichte die Senkrechte in einem Punkt $X$ von $g$.
2. Trage auf der Senkrechten von $X$ aus die Streckenlänge $h$ ab und bezeichne den Punkt mit $X'$.
3. Errichte in $X'$ auf der Senkrechten die Senkrechte.

Wir konstruieren Dreiecke mit Hilfe von Hilfsdreiecken: $s_c, c, \alpha$ und $h_a, w_\alpha, r_i$.