Korrespondenz-Seminar der LSGM 2011/12

Klasse 7, Treff 2 am 7. Januar 2012

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgaben:

1) Auf wie viele Nullen endet $31! = 31 \cdot 30 \cdots 2 \cdot 1$, d.h. wie viele Primfaktoren 5 enthält das Produkt? A: 7.
2) Ein Quadrat der Fläche 196 hat welchen Umfang? A. 56
3) $1111 - 222 = 889$
4) Jemand hat 11 rote, 12 braune und 13 schwarze Sochen in einem Beutel. Wie viele Socken muss er blind aus dem Beutel ziehen, damit er mit Sicherheit ein schwarzes Paar Socken hat? A: 25b) mindestens ein passendes Paar weißer oder schwarzer Handschuhe hat? 61.
5) Bei einem Quadrat sind die beiden Diagonalen eingezeichnet und die benachbarten Seitenmitten wurden miteinander verbunden. Wie viele Dreiecke enthält die entstandene Figur? A: 20.
6) Wie viele A4-Blätter benötigt man, um ein A0-Blatt zu überdecken? A: 16.
7) Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen $8 \cdot 93$ und $9 \cdot 82$? A: 5.
8) Welchen Winkel schließen Minuten- und Stundenzeiger der Uhr um 9:10 Uhr ein? A: 145°.
9) Bei einer Subtraktionsaufgabe beträgt der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des Minuenden. Wie viel Prozent des Minuenden macht die Differenz aus? A. 60%.

Fakultäten

Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man das Produkt $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ als „n-Fakultät“. Es ist $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$. Man kann die Fakultäten rekursiv berechnen, $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 120$ und allgemein $n! = n \cdot (n-1)!$. Diese Zahl $n!$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, n verschiedene Gegenstände in einer Reihe anzuordnen. Beispiel: Es gibt 6 Anordnungen von weiß, rot, blau als nebeneinanderliegende Streifen: wrb, wbr, bwr, brw, rwb, rbw. Diese Anordnungen bezeichnet man als Permutationen.

Termumformungen am Beispiel der Papierformate von A0 bis A4

Wir wollen das Seitenverhältnis eines A4-Blattes bestimmen. Es seien a und b die längere bzw. kürzere Seite des A4-Rechtecks. Man erhält dann das A3-Rechteck, indem man die kleinere Seite verdoppelt (die dann zur größeren Seite wird) und die Größere Seite beibehält (die dann zur kleineren Seite wird). Dann sind $2b$ und a die längere bzw. kürzere Seite des Rechtecks A3. Die zweite wichtige Bemerkung ist, dass alle Rechtecke A0, A1 usw. zueinander *ähnlich* sind. Das heißt, dass das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite immer gleich ist. Also gilt: $a : b = 2b : a$.

$$a : b = 2b : a.$$

Dies formen wir nun um, um das Verhältnis $\frac{a}{b}$ explizit zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{b}{\frac{a}{2}} \quad | \cdot b \\
\frac{a}{b}\, b &= \frac{b}{\frac{a}{2}}\, b \\
a &= \frac{b \cdot b}{\frac{a}{2}} \quad | \cdot \frac{a}{2} \\
a \cdot \frac{a}{2} &= b^2 \\
\frac{a^2}{2} &= b^2 \quad | \cdot 2 : b^2 \\
\frac{a^2}{b^2} &= 2 \\
\left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2 \quad | \sqrt{\ } \\
\frac{a}{b} &= \sqrt{2} \approx 1,4142.
\end{aligned}$$

Tatsächlich ergeben die Messungen der Seitenlängen eines A4 Blattes $21,0\,\mathrm{cm}$ bzw $29,7\,\mathrm{cm}$, was ungefähr dem Verhältnis $\sqrt{2}$ entspricht.

Wir bestimmen nun die Seitenlängen des A0-Blattes. Hier gilt einerseits $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ und außerdem $ab = 1\,\mathrm{m}^2$. Setzt man $a = b\sqrt{2}$ in die zweite Gleichung ein, so hat man $b\sqrt{2} \cdot b = 1$ also $b^2 = 1/\sqrt{2}$. Zieht man hier noch einmal die Wurzel, so hat man $b = 1/\sqrt{\sqrt{2}} = 0,841$ und $a = 1,19$ (Angaben in m). Geometrisch erhält man dasselbe Resultat, wenn man die Seitenlängen des A4-Blattes beide vervierfacht, also $a = 4 \cdot 29,7\,\mathrm{cm} = 1,188\,\mathrm{m}$ und $b = 4 \cdot 21,0\,\mathrm{cm} = 0,84\,\mathrm{m}$.

Für das A4-Blatt erhält man $a_4 = \sqrt[4]{2}/4 = 0,2973\ldots$ und für die kleinere Seite $b_4 = a_4/\sqrt{2} = 0,2102\ldots$.

Pause: Rasende Roboter.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Welche Reste treten bei Division durch 3 auf, natürlich 0, 1 und 2. Alle ganzen Zahlen, die denselben Rest lassen fassen wir zu einer *Restklasse* zusammen:

$$\begin{aligned}
[0]_3 &= \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9, -12, \ldots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\
[1]_3 &= \{1, 4, 7, 10, 13, -2, -5, -8, \ldots\} = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\
[2]_3 &= \{2, 5, 8, 11, -1, -4, -7, \ldots\} = \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Zahlen, die in derselben Klasse liegen heißen *zueinander kongruent modulo 3*. Wir schreiben

$$0 \equiv 3 \pmod 3, \quad 7 \equiv -8 \pmod 3, \quad 5 \equiv -7 \pmod 3.$$

Bei der Division durch 2 gibt es nur zwei Restklassen, 0 und 1. Die Restklasse $[0]_2$ der durch 2 teilbaren Zahlen ist die Menge der geraden Zahlen und die Restklasse $[1]_2$ ist die Menge der ungeraden Zahlen.

Nun kann man an Stelle von 2 oder 3 einen beliebigen *Modul* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ betrachten. Das führt zu folgender allgemeinen Definition:

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* m, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a-b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q \in \mathbb{Z}\colon a = qm + b$.

Wir schreiben $a \equiv b \pmod m$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m".

Spezialfall: $b = 0$. $a \equiv 0 \pmod m$ bedeutet nach Bedingung 2. $m \mid a$.
Beispiele:

$$12345 \equiv 54321 \pmod 3, \quad 91 \equiv 35 \pmod 7, \quad 123456 \equiv 6 \pmod{10}, \quad 123456 \equiv 56 \pmod{100},$$
$$2010 \equiv -3 \pmod{11}, \quad 2011 \equiv 1 \pmod 3.$$

Spezialfälle: $m = 10$ und $m = 100$. Zwei (natürliche) Dezimalzahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie auf dieselbe Ziffer enden. Zwei Dezimalzahlen sind kongruent modulo 100, wenn ihre letzten beiden Ziffern übereinstimmen.

Wir erwähnen drei weitere Spezialfälle: Die Teilbarkeitsregekn für 9, 3 und 11. Bezeichnet man mit $Q(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl n und mit $A(n)$ deren alternierende Quersumme, begonnen mit der Einerziffer: $A(123456) = 6-5+4-3+2-1 = 3$, $Q(123456) = 1+2+3+4+5+6 = 21$, dann gilt

$$n \equiv Q(n) \pmod 9, \quad n \equiv Q(n) \pmod 3, \quad n \equiv A(n) \pmod{11}.$$

Beispiel:

$$12345678910 \equiv Q(12345678910) \equiv 1+2+3+\cdots+10 \equiv 55 \equiv Q(55) \equiv 10 \equiv Q(10) \equiv 1 \pmod{10}.$$

$$5^n \equiv 5 \pmod{10}, \quad 6^n \equiv 6 \pmod{10}, \quad 1^n \equiv 1 \pmod{10}, \quad 0^n \equiv 0 \pmod{10}$$
$$4^n \equiv 4, 6 \pmod{10}, \quad 9^n \equiv 9, 1 \pmod{10}$$
$$2^n \equiv 2, 4, 8, 6 \pmod{10}, \quad 3^n \equiv 3, 9, 7, 1 \pmod{10}, \quad 7^n \equiv 7, 9, 3, 1 \pmod{10}$$

Eigenschaften der Kongruenzen

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität: Für alle ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a \equiv a \pmod{m},$$
$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m},$$
$$a \equiv b \pmod{m}, \quad b \equiv c \pmod{m} \Longrightarrow a \equiv c \pmod{m}.$$

Rechnen mit Kongruenzen

Kongruenzen können wie Gleichungen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden. Genauer, wenn $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$, dann gilt auch

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$
$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$
$$ac \equiv bd \pmod{m}$$
$$a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

Hierbei ist n eine beliebige natürliche Zahl.

Es gibt 2 Möglichkeiten, eine Kongruenz zu *dividieren*

a) $an \equiv bn \pmod{mn}$. Dann folgt $a \equiv b \pmod{m}$.
b) Wenn $an \equiv bn \pmod{m}$ und n, m sind teilerfremd, also $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$, dann gilt auch $a \equiv b \pmod{m}$.

Berechne!

1) $123 \cdot 456 \cdot 789 \pmod{9}$.
2) $2^{100} \pmod{7}$. Hinweis: Bestimme zunächst die Reste von $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ und versuche eine Regelmäßigkeit festzustellen.
3) $44^{44} \cdot 55^{55} \cdot 66^{66} \pmod{10}$
4) $87^{432} + 45^{17} \pmod{11}$