Korrespondenz-Seminar der LSGM 2010/2011

Klasse 7, Treff 3 am 26. März 2011

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgabe:

1) Wie oft lässt sich 50! ohne Rest durch 7 teilen? Antw. $[50/7]+[50/49]=7+1=8$ Mal.
2) Berechne $23^2=529$ und $27^2=729$. Ist es Zufall, dass die Differenz 200 ist?
3) Drei Spielwürfel stehen übereinander. Die Summe der Augenzahlen der beiden direkt aufeinanderliegenden verdeckten Seiten ist jeweils 6. Ganz oben ist eine 6 zu sehen. Welche Augenzahl zeigt nach unten zum Tisch? 3.
4) $1+3+5+\cdots+97+99=2500$
5) $1+2-3-4+5+6-\cdots-98-99=-100$.
6) Ein Würfel hat das Volumen $64\,\mathrm{cm}^3$. Wie groß ist die Summe seiner Kantenlängen? $48\,\mathrm{cm}$.
7) Für welche Ziffer $*$ ist die sechsstellige Zahl $z=1773*9$ durch 99 teilbar? $*=0$.

Binomische Formeln

Mit der Klausaufgabe 2 wurden die drei binomischen Formeln eingeführt:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Analog zu Klausaufgabe 2 wurden die Quadratzahlpaare $21^2=441$, $29^2=841$, $22^2=484$, $28^2=784$, $24^2=576$, $26^2=676$ betrachtet, deren Differenz jeweils gleich $100n$ ist, wobei $n=21-a$ und $a=21,22,23,24$. Wir setzten $a=29$ und $b=21$ in die 3. binomische Formel ein und erkennen, $29^2-21^2=(29+21)(29-21)=50\cdot 8=400$. Der Hauptgrund für diese Eigenschaft ist also, dass die Summe der beiden Zahlen stets 50 ist.

Wir wiederholen das Distibutivgesetz $a(b+c)=ab+ac$ und erweitern es durch ersetzen von $a:=a+d$ auf $(a+d)(b+c)=(a+d)b+(a+d)c=ab+db+ac+dc$. Mit Hilfe der letzten Formel beweisen wir die drei binomischen Formeln, indem wir einsetzen $d:=b$ und $c:=a$ bzw. $c:=a$ und $d:=-b$. Die zweite binomische Formel leiten wir aus der ersten her durch Einsetzen von $b:=-b$.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Berechne die kleinsten Reste.

a) $123 \cdot 456 \cdot 789 \pmod 9$.
b) Auf welche Ziffer endet 2^{2011}.
c) Berechne $3^{2011} \pmod{11}$
d) Auf welche letzten beiden Ziffern endet $7^{7^{7^7}}$?

a) Wir benutzen die Neunerregel $n \equiv Q(n) \pmod 9$ und erhalten $123 \equiv 456 \equiv 789 \equiv 6 \pmod 9$ und erhalten $123 \cdot 456 \cdot 789 \equiv 6 \cdot 6 \cdot 6 \equiv 0 \pmod 9$.

b) Die Folge der Potenzen zur Basis 2 modulo 10 hat schließlich die Periode 4:

$$2^0 \equiv 1, \quad 2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8, \quad 2^4 \equiv 6, \quad 2^5 \equiv 2, \dots$$

Wir müssen also den Exponenten 2011 modulo 4 betrachten: $2011 \equiv 3 \pmod 4$. Somit ist es der dritte Rest (nach 1) in der obigen Folge: $2^{2011} \equiv 8 \pmod{10}$.

Allgemein gilt: Die Folge der Potenzreste $(a^n) = (1, a, a^2, a^3, a^4, \dots)$ wird modulo m periodisch. Falls a und m teilerfremd sind, taucht in dieser Folge auch wieder der Rest 1 auf. Ist dies zum ersten Mal bei N der Falle, also $a^N \equiv 1 \pmod m$, dann ist die Folge periodisch der Länge N (Beispiel oben: $N = 2$ bei $9^n \pmod{10}$ und $N = 4$ bei $3^n \pmod{10}$.) Haben a und m einen gemeinsamen Teiler, so wird die Folge auch periodisch, doch in der Regel mit einer Vorperiode, 1 taucht als Rest nicht mehr auf (Beispiel: $6^n \pmod{10}$ ist periodisch mit $N = 1$, aber mit Vorperiode).

Lösung: Wir betrachten die Folge der Potenzen $3^n \pmod{11}$ und erhalten c)

$$3^0 \equiv 1, \quad 3^1 \equiv 3, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 3^3 \equiv 27 \equiv 5, \quad 3^4 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 4, \quad 3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Damit hat diese Folge die Periodenlänge 5. Wir haben $2011 \equiv 1 \pmod 5$ und daher $3^{2011} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{11}$.

Lösung: d) Wir betrachten die Folge $7^n \pmod{100}$. Man berechnet

$$7^0 \equiv 1, \quad 7^1 \equiv 7, \quad 7^2 \equiv 49, \quad 7^3 \equiv 43, \quad 7^4 \equiv 301 \equiv 1 \pmod{100}.$$

Damit ist die Periodenlänge hier gleich 4. Wir müssen den Exponenten $e = 7^{7^7}$ modulo 4 betrachten. Es gilt

$$e = 7^{7^7} \equiv (-1)^{7^7} \equiv (-1)^1 \equiv 3 \pmod 4.$$

Also ist der dritte Rest (nach 1) in der Folge der Gesuchte: $7^{7^{7^7}}$ endet auf 43.

Offen: Quadratische Reste. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$.
$n^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$.

Hieraus lässt sich ableiten: Die Summe zweier ungerader Quadratzahlen ist nie eine Quadratzahl. Ist die Summe zweier Quadratzahlen durch 3 teilbar, so ist jede Zahl einzeln schon durch 3 teilbar. Die Summe dreier Quadratzahlen ist nie $\equiv 7 \pmod 8$. Gilt $x^2 + y^2 = z^2$, so ist $3 \mid xy$ und $5 \mid xyz$.

Pause: SET (Wie viele Karten gibt es überhaupt?), Rasende Roboter.

Innenwinkelsätze und Außenwinkelsatz

Wir beweisen den

> Innenwinkelsatz im Dreieck: Die Summe der drei Innenwinkel beträgt 180°.
> Außenwinkelsatz: Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie die Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

Wir bestimmen die Innenwinkelsumme im Viereck (360°) und Fünfeck (540°) und finden eine allgemeine Formel für die Innenwinkelsumme des n-Ecks $(n-2)180^\circ$.

Mit Hilfe diese beiden Sätze bestimmen wir die Innenwinkelsumme eines 5-Eck-Sterns (180°) und eines 7-Eck-Sterns (ebenfalls 180°), wenn man die Ecken $1,4,7,3,6,2,5,1$ in dieser Reihenfolge verbindet. Offen: Welche Innenwinkelsumme hat der 7-Eck-Stern, wenn man die Punkte $1,3,5,7,2,4,6,1$ verbindet?