Korrespondenz-Seminar der LSGM 2010/11

Klasse 7, Treff 2 am 8. Januar 2011

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgaben:

1)Wie oft lässt sich $20! = 20 \cdot 19 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ohne Rest durch 3 teilen, d.h., wie viele Primfaktoren 3 enthält 20!? A: 8
2) $\sqrt{624} = 25$.
3) Ein Rechteck hat den Umfang 24 cm. Wie groß ist sein Flächeninhalt dann höchstens? $36\,\mathrm{cm}^2$.
4) Jemand hat 10 rechte weiße, 20 linke weiße, 30 rechte schwarze und 40 linke schwarze Handschuhe in einem Sack. Wie viele Handschuhe muss er blind aus dem Sack ziehen, damit er

a) mindestens ein passendes weißes Paar Handschuhe hat? 91.
b) mindestens ein passendes Paar weißer oder schwarzer Handschuhe hat? 61.

5) $1-2+3-4+5-6+\cdots-98+99 = 50$.
6) $1+2+\cdots+1000 = 500500$.
7) Welche Zahl ist keine Quadratzahl

$$1)7396 = 86^2 \quad 2)4761 = 69^2 \quad 3)2916 = 54^2 \quad 4)1528 = 39^2+7 \quad 5)1764 = 42^2.$$

8) Welche Zahl ist nicht durch 9 teilbar?

$$1)7380 \quad 2)4761 \quad 3)2916 \quad 4)1528 \quad 5)1764$$

Papierformate von A0 bis A5

Wir wollen das Seitenverhältnis eines A4-Blattes bestimmen. Es seien a und b die längere bzw. kürzere Seite des A4-Rechtecks. Man erhält dann das A3-Rechteck, indem man die kleinere Seite verdoppelt (die dann zur größeren Seite wird) und die Größere Seite beibehält (die dann zur kleineren Seite wird). Dann sind $2b$ und a die längere bzw. kürzere Seite des Rechtecks A3. Die zweite wichtige Bemerkung ist, dass alle Rechtecke A0, A1 usw. zueinander *ähnlich* sind. Das heißt, dass das Verhältnis von längerer zu kürzerer Seite immer gleich ist. Also gilt: $a : b = 2b : a$.

$$a : b = 2b : a.$$

Dies formen wir nun um, um das Verhältnis $\frac{a}{b}$ explizit zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{b}{\frac{a}{2}} \quad |\cdot b \\
\frac{a}{b}\,b &= \frac{b}{\frac{a}{2}}\,b \\
a &= \frac{b\cdot b}{\frac{a}{2}} \quad |\cdot\frac{a}{2} \\
a\cdot\frac{a}{2} &= b^2 \\
\frac{a^2}{2} &= b^2 \quad |\cdot 2 : b^2 \\
\frac{a^2}{b^2} &= 2 \\
\left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2 \quad |\sqrt{} \\
\frac{a}{b} &= \sqrt{2} \approx 1,4142.
\end{aligned}$$

Wir diskutieren, dass die Gleichung $a^2 = 2b^2$ keine Lösung in natürlichen Zahlen a und b besitzt, denn die eindeutige Primfaktorzerlegung von a^2 enthält den Primfaktor 2 in gerader Anzahl, wogegen $2b^2$ den Faktor 2 ungerade oft enthält. Das kann nicht sein.

Tatsächlich ergeben die Messungen der Seitenlängen eines A4 Blattes $21,0\,\mathrm{cm}$ bzw $29,7\,\mathrm{cm}$, was ungefähr dem Verhältnis $\sqrt{2}$ entspricht.

Wir bestimmen nun die Seitenlängen des A0-Blattes. Hier gilt einerseits $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ und außerdem $ab = 1\,\mathrm{m}^2$. Setzt man $a = b\sqrt{2}$ in die zweite Gleichung ein, so hat man $b\sqrt{2}\cdot b = 1$ also $b^2 = 1/\sqrt{2}$. Zieht man hier noch einmal die Wurzel, so hat man $b = 1/\sqrt{\sqrt{2}} = 0,841$ und $a = 1,19$ (Angaben in m). Geometrisch erhält man dasselbe Resultat, wenn man die Seitenlängen des A4-Blattes beide vervierfacht, also $a = 4\cdot 29,7\,\mathrm{cm} = 1,188\,\mathrm{m}$ und $b = 4\cdot 21,0\,\mathrm{cm} = 0,84\,\mathrm{m}$.

Hinweis auf „Goldenen Schnitt“: Dies hat mit den Papierformaten nichts zu tun, sondern mit dem regulären Fünfeck und $\sqrt{5}$.

Serie 3, Aufgabe 4 wird von Sebastian vorgerechnet.

Pause: Rasende Roboter.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Welche Reste treten bei Division durch 3 auf, natürlich 0, 1 und 2. Alle ganzen Zahlen, die denselben Rest lassen fassen wir zu einer *Restklasse* zusammen:

$$\begin{aligned}
[0]_3 &= \{0,3,6,9,-3,-6,-9,-12,\dots\} = \{3n \mid n\in\mathbb{Z}\}, \\
[1]_3 &= \{1,4,7,10,13,-2,-5,-8,\dots\} = \{3n+1 \mid n\in\mathbb{Z}\}, \\
[2]_3 &= \{2,5,8,11,-1,-4,-7,\dots\} = \{3n+2 \mid n\in\mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Zahlen, die in derselben Klasse liegen heißen *zueinander kongruent modulo 3*. Wir schreiben

$$0 \equiv 3 \pmod 3, \quad 7 \equiv -8 \pmod 3, \quad 5 \equiv -7 \pmod 3.$$

Bei der Division durch 2 gibt es nur zwei Restklassen, 0 und 1. Die Restklasse $[0]_2$ der durch 2 teilbaren Zahlen ist die Menge der geraden Zahlen und die Restklasse $[1]_2$ ist die Menge der ungeraden Zahlen.
Nun kann man an Stelle von 2 oder 3 einen beliebigen *Modul* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ betrachten. Das führt zu folgender allgemeinen Definition:

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* m, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m \mid (a-b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q \in \mathbb{Z}\colon a = qm + b$.

Wir schreiben $a \equiv b \pmod{m}$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m“.

Spezialfall: $b = 0$. $a \equiv 0 \pmod{m}$ bedeutet nach Bedingung 2. $m \mid a$.
Beispiele:

$$12345 \equiv 54321 \pmod{3}, \quad 91 \equiv 35 \pmod{7}, \quad 123456 \equiv 6 \pmod{10}, \quad 123456 \equiv 56 \pmod{100}, \quad 2010 \equiv -3 \pmod{11}, \quad 2011 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Spezialfälle: $m = 10$ und $m = 100$. Zwei (natürliche) Dezimalzahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie auf dieselbe Ziffer enden. Zwei Dezimalzahlen sind kongruent modulo 100, wenn ihre letzten beiden Ziffern übereinstimmen.

Eigenschaften der Kongruenzen

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität: Für alle ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} &a \equiv a \pmod{m}, \\ &a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m}, \\ &a \equiv b \pmod{m}, \quad b \equiv c \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv c \pmod{m}. \end{aligned}$$

Rechnen mit Kongruenzen

Kongruenzen können wie Gleichungen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden. Genauer, wenn $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$, dann gilt auch

$$\begin{aligned} a + c &\equiv b + d \pmod{m} \\ a - c &\equiv b - d \pmod{m} \\ ac &\equiv bd \pmod{m} \\ a^n &\equiv b^n \pmod{m} \end{aligned}$$

Hierbei ist n eine beliebige natürliche Zahl.

Anwendung: Herleitung der Neunerregel. Aus $10 \equiv 1 \pmod 9$ folgt nach Potenzieren $10^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 9$ und weiter $10^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 9$. Sind a, b, c Ziffern, so hat man nach Multiplikation $a\,10^2 \equiv a \pmod 9$, $b\,10^1 \equiv b \pmod 9$ und $c\,10^0 \equiv c \pmod 9$. Addiert man diese drei Kongruenezen, so hat man

$$a\ 10^2 + b\,10^1 + c\,10^0 \equiv a + b + c \pmod 9$$

Links steht die dreistellige Zahl abc in Dezimaldarstellung und rechts deren Quersumme $Q(abc) = a + b + c$. Das gilt für beliebige natürliche Zahlen:

Neunerregel: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $n \equiv Q(n) \pmod 9$. Außerdem gilt $n \equiv Q(n) \pmod 3$ und $n \equiv A(n) \pmod{11}$, wobei $A(n)$ die alternierende Quersumme von n ist, also $A(3791) = 1 - 9 + 7 - 3 = -4$.

Es gibt 2 Möglichkeiten, eine Kongruenz zu dividieren

a) $an \equiv bn \pmod{mn}$ Dann folgt $a \equiv b \pmod m$.
b) Wenn $an \equiv bn \pmod m$ und n, m sind teilerfremd, dann gilt auch $a \equiv b \pmod m$.

Berechne!

1) $123 \cdot 456 \cdot 789 \pmod 9$.
2) $2^{100} \pmod 7$. Hinweis: Bestimme zunächst die Reste von $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ und versuche eine Regelmäßigkeit festzustellen.
3) $44^{44} \cdot 55^{55} \cdot 66^{66} \pmod{10}$
4) $87^{432} + 45^{17} \pmod{11}$