Korrespondenz-Seminar der LSGM 2009/10

Klasse 7, Treff 1 am 6. November 2010

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgabe:

1) Auf wie viele Nullen endet 10! bzw 31!? A: 7
2) Ein Quadrat der Fläche 196 hat welchen Umfang? A. 56
3) $1111 - 222 = 889$
4) Jemand hat 11 rote, 12 braune und 13 schwarze Sochen in einem Beutel. Wie viele Socken muss er blind aus dem Beutel ziehen, damit er mit Sicherheit ein schwarzes Paar Socken hat? A: 25
5) $1+2+3+4+5+6=21$
6) Man erhält aus einem A0 Blatt ein A1 Blatt indem man es auf der Verbindung der beiden längeren Seiten halbiert. Dasselbe Verfahren wendet man an, um A2, A3 und A4 zu erzeugen. Wie viele A4 Blätter braucht man zum Überdecken eines A0 Blattes? A: 16

Es wird erläutert, wie man auf die Anzahl der Endnullen bei $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdots 1$ kommt: Man muss die Anzahl der Faktoren 5 zählen. Bei 31 hat man $31/5 = 6$ einfache Faktoren 5 (5,10,15,20,25,30) und eine doppelte 5 bei $25 = 5^2$. Damit hat man 7 Faktoren 5 und somit 7 Endnullen. Allgemein hat man bei $n!$ genau

$$a(n) = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \cdots$$

Endnullen. Dabei bedeutet $[x]$ den ganzzahligen Anteil von x.

Teilbarkeit

Wir wiederholen die Teilbarkeitsregeln zur 2,3,9,11. Wir definieren die *Quersumme* $Q(n)$ als Summe der Ziffern von n und die *alternierende Quersumme* $A(n)$, wo die Ziffern von n, beginnend mit der Einerziffer abwechselnd addiert und subtrahiert werden: $A(9876) = 6 - 7 + 8 - 9 = -2$ und $A([abcabc]_{10}) = c - b + a - c + b - a = 0$. Die Symbole $\exists$ (es existiert ein) und $\forall$ (für alle) werden eingeführt. Die Zahlenbereichssymbole werden wiederholt: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$. Die Teilbarkeitsregelnlauten dann:

$\forall n \in \mathbb{N}\colon 3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid Q(n)$.
$\forall n \in \mathbb{N}\colon 9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid Q(n)$.
$\forall n \in \mathbb{N}\colon 11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid A(n)$.

Aufgabe 1 Bestimme alle 5-stellige Zahlen n der Form $n = 98ab5$ (mit Ziffern a, $b \in \{0,1,\dots,9\}$), die a) durch 9 b) durch 11 c) 99 teilbar sind.

Lösung: a) Berechne zunächst die Quersumme von n, $Q(n) = 9+8+a+b+5 = 22+n$. Wegen $0 \leq a+b \leq 18$ kommt für die Quersumme nur die nächst und übernächste durch 9 teilbare Zahlen in Frage: 27 und 36:
Fall 1: $Q(n) = 22+a+b = 27$, also $a+b = 5$ (6 Lösungen), Fall 2: $Q(n) = 22+a+b = 36$, also $a+b = 14$ (5 Lösungen).
b) Berechne die alternierende Quersumme $A(n) = 5-b+a-8+9 = 6-b+a$. Auch hier kommen 2 Fälle in Frage $A(n) = 0$ oder $A(n) = 11$.
c) Es gibt genau eine gemeinsame Lösung von a) und b).

Pause: Rasende Roboter.

Das Symbol $a \mid b$, also „a teilt b“ wird erläutert. Es hat nur für ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ einen Sinn. Äquivalent dazu sind die Formulierungen

(1) $b/a \in \mathbb{Z}$,

(2) b ist ein ganzzahliges Vielfaches von a

(3) Es gibt eine ganze Zahl q mit $b = qa$.

(4) $\exists q \in \mathbb{Z}\colon b = qa$.

Es werden drei Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation aufgeschrieben, Reflexivität, Transitivität und $\forall a,b,c\colon a \mid b, \quad a \mid c \Longrightarrow a \mid (b \pm c)$. Die Transitivität wird bewiesen indem das Symbol $a \mid b$ mittels (3) in eine Gleichung umgewandelt wird.

Größter gemeinsamer Teiler und Euklidischer Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus bestimmt zu zwei gegebenen natürlichen Zahlen a und b deren größten gemeinsamen Teiler, $\operatorname{ggT}(a,b)$. Wenn $a > b$, dann folgt

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(a-b,b).$$

Das Wesentliche der obigen Gleichung ist, dass die größere der beiden Zahlen, nämlich a, auf der rechten Seite nicht mehr auftritt und durch die kleinere Zahl $a-b$ ersetzt wurde. Diese Subtraktion von b kann man nun so lange fortführen bis man b nicht mehr abziehen kann:

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(a-b,b) = \operatorname{ggT}(a-2b,b) = \cdots = \operatorname{ggT}(a-qb,b) = \operatorname{ggT}(r,b), \quad a-qb = r < b$$

Nun kann man genauso verfahren und r so lange von b abziehen bis es nicht weiter geht und $b - q_1 r < r$. Diese Verfahren bricht irgendwann ab mit zwei Zahlen $(0,d)$. Dann ist $d = \operatorname{ggT}(a,b)$. Anstelle der fortgesetzten Subtraktion der jeweils kleineren Zahl, kann man auch gleich eine Division mit Rest durchführen. Dieses Verfahren ist im „Arbeitsmaterial“, Abschnitt 3.1 erläutert.

Winkel und Umformen von Gleichungen

Wir wiederholen drei Winkelsätze am Dreieck

(1) Innenwinkelsatz.
(2) Außenwinkelsatz.
(3) Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich groß.

Der Außenwinkelsatz wird mit Hilfe einer zu AB parallelen Gerade durch C bewiesen, wobei WEchselwinkel- und Stufenwinkelsatz benutz werden. Diese Sätze benutzen wir zur Lösung der folgenden Aufgaben:

Aufgabe 2 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit den Schenkeln $\overline{AC} = \overline{BC}$. Ferner sei D ein Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ und E ein Punkt auf der Strecke $\overline{AC}$, sodass gilt: $\angle ACD$ ist so groß wie der Außenwinkel bei C und $\overline{AD} = \overline{AE}$.

a) Ermittle die Größe des Winkels $\angle AED$, wenn gilt $\angle DCB = 80°$.
b) Ermittle die Größe des Winkels $\angle AED$, wenn gilt $\angle DCB = 40°$.
c) Wie groß muss $\angle DCB$ gewählt werden, damit gilt $\angle DCB = \angle AED$?

Dabei wird der Winkel $\varphi = \angle AED$ ausgedrückt durch den Winkel $\psi = \angle DCB$ allein: $\varphi = 67,5° + \psi/8$.