Korrespondenz-Seminar der LSGM 2009/10

Klasse 7, Treff 4 am 29. Mai 2010

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgabe:

1) Welche Innenwinkelsumme hat ein Sechseck? (720°)
2) Für welche natürlichen Zahlen $a < b$ gilt $a^b = b^a$? (2,4) sind die einzigen nach eindeutiger Primzahlzerlegung.
3) $\sqrt{729} = 27$
4) $5^4 = 625$
5) $888 - 99 = 789$
6) $1001 : 13 = 77$.
7) Ein Würfel der Kantenlänge 1 wird auf einen Würfel der Kantenlänge 2 gestellt. Wie groß ist die Oberfläche des entstehenden Körpers? (28)
8) Zwei kongruente Quadrate samt Diagonalen werden an einer Seite in einer gemeinsamen Ebene verklebt. Wie viele Dreiecke besitzt diese Figur? (18)

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Wir besprachen die 3 binomischen Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(1. binomische Formel)}\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(2. binomische Formel)}\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{(3. binomische Formel)} \end{aligned}}$$

Lösen von Gleichungen

Wir wiederholten auch das *Distributivgesetz*, das zum Ausmultiplizieren benötigt wird:

$$a(b+c) = ab+ac, \quad (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Bei *Termumformungen* sind folgende Schritte zu gehen:

1. Hauptnenner bilden, wenn Brüche vorkommen,
2. Ausmultiplizieren,
3. Zusammenfassen.

Beim *Umformen von Gleichungen* muss man im Prinzip wie bei Termumformungen vorhehen und noch weitere Dinge beachten

- Die Variable muss aus dem Nenner raus in den Zähler. Das geschieht in der Regel durch Multiplikation mit dem Hauptnenner.
- Die Variable sollte auf *einer* Seite der Gleichung gesammelt werden und auf der anderen Seite gar nicht mehr auftreten.
- Die Operationen mit Gleichungen werden hinter der Gleichung mit einem senkrechten Strich, der Operationsanweisung, angegeben.
- Nach Lösen der Gleichung macht man eine Probe.

Eine einzige Gleichung mit einer einzigen Variablen, die nur in der 1. Potenz (und nicht im Nenner) auftritt, kann drei verschiedene Lösungsverhalten zeigen:

Genau eine Lösung. Beispiel: $2x+4=0$ hat die eindeutige Lösung $x=-2$.
Keine Lösung. Beispiel: $2x+4=2x$.
Alle rationalen Zahlen sind Lösung. Beispiel: $2x+4=2(x+1)+2$.

Beispiel 1: Löse in $\mathbb{Q}$:

$$5(x-3)+2(x-1)=4(x-2)-(x+1).$$

Im ersten Schritt werden mittels Distributivgesetz die Klammern aufgelöst und es wird zusammengefasst. Dann werden die x-Terme auf die linke Seite und die ohne-x-Terme auf die rechte Seite der Gleichung geschafft:

$$\begin{aligned} 5(x-3)+2(x-1)&=4(x-2)-(x+1)\\ 5x-15+2x-2&=4x-8-x-1\\ 7x-17&=3x-9 \quad |-3x\\ 4x-17&=-9 \quad |+17\\ 4x&=8 \quad |:4\\ x&=2. \end{aligned}$$

Die Probe liefert auf der linken Seite $5(2-3)+2(2-1)=-5+2=-3$ und auf der rechten Seite $4(2-2)-(2+1)=0-3=-3$ dasselbe Ergebnis. Folglich ist $x=2$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung.

Beispiel 2: Ermittle alle $x\in\mathbb{Q}$ mit

$$(2x-1)^2=4(x-2)^2-3.$$

Mit Hilfe der 2. binomischen Formel werden die beiden Quadrate berechnet: $(2x-1)^2 = 4x^2-4x+1$ und $(x-2)^2 = x^2-4x+4$. Dies setzt man ein und erhält:

$$\begin{aligned}
(2x-1)^2 &= 4(x-2)^2-3\\
4x^2-4x+1 &= 4(x^2-4x+4)-3\\
4x^2-4x+1 &= 4x^2-16x+16-3\\
4x^2-4x+1 &= 4x^2-16x+13 \quad |-4x^2+16x\\
12x+1 &= 13 \quad |-1\\
12x &= 12 \quad |:12\\
x &= 1.
\end{aligned}$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

Beispiel 3. Für welche $x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x}.$$

Hier muss die Gleichung zuerst mit dem Hauptnenner $x(x-1)(x+1)$ multipliziert werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
x(x+1)+x(x-1) &= 2(x-1)(x+1)\\
x^2+x+x^2-x &= 2(x^2-1)\\
2x^2 &= 2x^2-2 \quad |-2x^2\\
0 &= -2.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Die Gleichung besitz keine Lösung.

Lösen von Ungleichnungen

> Multipliziert man eine Ungleichung mit einer positiven Zahl, so bleibt das Relationszeichen erhalten, multipliziert man mit einer negativen Zahl, so kehrt sich das Relationszeichen um. Dasselbe gilt bei der Division einer Ungleichung.

$$\begin{aligned}
-2x+1 &> 3 \quad |-1\\
-2x &> 2 \quad |:(-2)\\
x &< -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2x+1 &> 3 \quad |+2x\\
1 &> 3+2x \quad |-3\\
-2 &> 2x \quad |:2\\
-1 &> x.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1 Für welche rationalen Zahlen x gilt: $\dfrac{x-1}{x-2} > 2$.

Lösung: $2 < x < 3$.

Dreieckskonstruktionen mit Summen und Differenzen von Strecken

Wir behandelten die folgenden vier Konstruktionsaufgaben:

a) $a+b, c, \alpha$
b) c, γ, h_c.
c) c, γ, s_c.
d) c, γ, a.
e) $a+b+c, \gamma, h_c$

Die Grundidee bei b), c), d) ist, dass die Menge der Punkte C zu gegebenem $c = \overline{AB}$ und γ auf einem Kreisbogen über der Sehne $\overline{AB}$ liegen. Dabei ist γ ein freier Peripheriewinkel über dieser Sehne mit der gewünschten Größe.