Korrespondenz-Seminar der LSGM 2009/10

Klasse 7, Treff 3 am 27. März 2010

Zuerst wurde „Klaus“ gespiel: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.
Aufgabe:

1) Wie oft lässt sich 10! ohne Rest durch 2 teilen? Antw. $10/2+10/4+10/8=5+2+1=8$ Mal.
2) Welches Volumen hat ein Quader mit Seitenlängen 3,4 und 5? (60) Welche Oberfläche hat er? (94)
3) $111-22=89$
4) $3^5=243$
5) $1+2+3+\cdots+10=55$
6) $\sqrt{529}=23$.
7) $1001:7=143$.
8) Mittels Dualsystem kann man mit den 10 Fingern die Zahlen von 0 bis $1023=2^{10}-1$ kodieren. Welcher Zahl entsprechen die beiden Mittelfinger (zusammen)? $2^2+2^7=4+128=132$.

Zahlenkongruenzen — Modulorechnung

Wir wiederholen den Begriff $a\equiv b \pmod{m}$ (vier Varianten) und die Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Potenzieren mit gleichem natürlichzahligem Exponenten).

Definition 1 Zwei ganze Zahlen $a,b\in\mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo m*, wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. a und b lassen bei Division durch m denselben Rest.
2. $m\,|\,(a-b)$, m teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3. $\frac{a-b}{m}\in\mathbb{Z}$. Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4. $\exists q\in\mathbb{Z}\colon a=qm+b$.

Wir schreiben $a \equiv b \pmod{m}$ und sprechen „a ist kongruent b modulo m“.

Spezialfall: $b = 0$. $a \equiv 0 \pmod{m}$ bedeutet nach Bedingung 2. $m \mid a$.

Beispiel *Neuneregel:* Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist ($n \equiv 0 \pmod 9$ gdw. $Q(n) \equiv 0 \pmod 9$). Es gilt aber viel allgemeiner: $n \equiv Q(n) \pmod 9$.

Welche Kongruenzen stimmen?

a) $666 \equiv 414 \pmod{63}$?
b) $401276 \equiv 25362 \pmod{99}$?
c) $9945 \equiv 4590 \pmod{357}$?

Finde die letzte Ziffer von

$$z = 123456^{789} \cdot 1999^{1999} \cdot 3553^{35}?$$

Wir müssen $z \pmod{10}$ berechnen und betrachten die Potenzen einzeln: $z \equiv 6^{789} \cdot 9^{1999} \cdot 3^{35} \pmod{10}$. Dabei endet 6^n immer auf 6. Die Folge der Potenzen $9^n \pmod{10}$ sieht so aus $(1, 9, 1, 9, \dots)$ hat also die Periode 2. Für ungeraden Exponenten erhält man $9^{1999} \equiv 9 \pmod{10}$. Die Folge der Potenzen zur Basis 3 hat schließlich die Periode 4:

$$3^0 \equiv 1, \quad 3^1 \equiv 3, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 3^3 \equiv 7, \quad 3^4 \equiv 1, \quad 3^5 \equiv 3, \dots$$

Wir müssen also den Exponenten 35 modulo 4 betrachten: $35 \equiv 3 \pmod 4$. Somit ist es der dritte Rest (nach 1) in der obigen Folge: $3^{35} \equiv 7 \pmod{10}$. Nun multiplizieren wir alles aus:

$$z \equiv 6^{789} \cdot 9^{1999} \cdot 3^{35} \equiv 6 \cdot 9 \cdot 7 \equiv 4 \cdot 7 \equiv 8 \pmod{10}.$$

Allgemein gilt: Die Folge der Potenzreste $(a^n) = (1, a, a^2, a^3, a^4, \dots)$ wird modulo m periodisch. Falls a und m teilerfremd sind, taucht in dieser Folge auch wieder der Rest 1 auf. Ist dies zum ersten Mal bei N der Falle, also $a^N \equiv 1 \pmod{m}$, dann ist die Folge periodisch der Länge N (Beispiel oben: $N = 2$ bei $9^n \pmod{10}$ und $N = 4$ bei $3^n \pmod{10}$.) Haben a und m einen gemeinsamen Teiler, so wird die Folge auch periodisch, doch in der Regel mit einer Vorperiode, 1 taucht als Rest nicht mehr auf (Beispiel: $6^n \pmod{10}$ ist periodisch mit $N = 1$, aber mit Vorperiode).

Aufgabe 1 Auf welche beiden Ziffern endet $7^{7^{7^7}}$?.

Lösung: Wir betrachten die Folge $7^n \pmod{100}$. Man berechnet

$$7^0 \equiv 1, \quad 7^1 \equiv 7, \quad 7^2 \equiv 49, \quad 7^3 \equiv 43, \quad 7^4 \equiv 301 \equiv 1 \pmod{100}.$$

Damit ist die Periodenlänge hier gleich 4. Wir müssen den Exponenten $e = 7^{7^7}$ modulo 4 betrachten. Es gilt

$$e = 7^{7^7} \equiv (-1)^{7^7} \equiv (-1)^1 \equiv 3 \pmod 4.$$

Also ist der dritte Rest (nach 1) in der Folge der Gesuchte: $7^{7^{7^7}}$ endet auf 43.

Aufgabe 2 Auf welche Ziffer endet 2^{2010}?

Lösung: Man erkennt

$$2^0 \equiv 1, \quad 2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8, \quad 2^4 \equiv 6, \quad 2^5 \equiv 2.$$

Damit ist die Periodenlänge hier ebenfalls gleich 4. Wegen $2010 \equiv 2 \pmod 4$ haben wir den zweiten Rest in der Periode zu nehmen: $2^{2010} \equiv 4 \pmod{10}$.

Dreieckskonstruktionen mit Summen und Differenzen von Strecken

Wir wiederholen die Inhalte der 4 Kongruenzsätze, SWS, WSW, SSS, SsW. Dabei gelten folgende Einschränkungen für die Konstruierbarkeit.
SSS: Wenn $a \leq b \leq c$ die gegebenen Seitenlängen sind, dann muss gelten $a+b > c$ (Dreiecksungleichung). Nur dann ist das Dreieck aus den gegebenen Stücken a, b, c eindeutig konstruierbar. Ist etwa $a+b=c$, so entartet das Dreieck zu einem Streckenzug; falls $a+b<c$, so gibt es keine Lösung.
SWS: keine Restriktionen, immer eindeutig ausführbar.
WSW: Gegeben seien α, c, β. Wenn $\alpha+\beta<180°$, ist das Dreieck eindeutig konstruierbar.
SsW: Gegeben seien a, b, α mit $a>b$. Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar.

Hier ist eine Anleitung für Konstruktionsaufgaben.

1. Skizze
2. Geschicktes Auswählen von Hilfslinien und Hilfspunkten, sodass sich ein geeignetes Hilfsdreieck nach einem der oberen Kongruenzsätzen konstruieren lässt.
3. Konstruktionsbeschreibung
4. Beweis, dass die angegebene Konstruktion tatsächlich auf das gesuchte Dreieck führt.
5. Diskussion: Eindeutigkeit und Ausführbarkeit der Konstruktion

Wir behandelten die folgenden vier Konstruktionsaufgaben:

a) $a+b+c, \alpha, h_c$ (Serie 4, Aufgabe 1)
b) $a+b+c, \alpha, \beta$.
c) $a+b, \alpha, \beta$.
d) $b-a, \alpha, \beta$, $(b>a)$.

Die Grundidee bei allen diesen Konstruktionen ist, dass, etwa bei b) ein Hilfsdreieck $A'B'C$ mit $\left|\overline{A'B'}\right| = a+b+c$ konstruiert wird, wobei die fehlenden Punkte A und B auf $\overline{A'B'}$ liegen und $\triangle A'AC$ und $\triangle B'BC$ jeweils ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basen $\overline{A'C}$ bzw. $\overline{B'C}$ bilden. Die gesuchten Spitzen A und B der besagten gleichschenkligen Dreiecke liegen auf den Mittelsenkrechten der Basen.