

# Korrespondenz-Seminar der LSGM 2009/10

## Klasse 7, Treff 2 am 9. Januar 2010

Zuerst wurde „Klaus“ gespielt: 2 Mannschaften erhalten jeweils 10 Ziffernkarten und müssen Kopfrechenaufgaben lösen. Kommen die Ziffern im Ergebnis vor, so müssen die Schüler mit diesen Ziffern vor gehen.

Aufgabe:

- 1) Auf wie viele Nullen endet  $10!$  bzw  $31!$ ?
- 2) Ein Quadrat der Fläche 196 hat welchen Umfang?
- 3)  $1111 - 222 =$
- 4) Jemand hat 11 rote, 12 braune und 13 schwarze Socken in einem Beutel. Wie viele Socken muss er blind aus dem Beutel ziehen, damit er mit Sicherheit ein schwarzes Paar Socken hat?
- 5)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =$
- 6) Man erhält aus einem A0 Blatt ein A1 Blatt indem man es auf der Verbindung der beiden längeren Seiten halbiert. Dasselbe Verfahren wendet man an, um A2, A3 und A4 zu erzeugen. Wie viele A4 Blätter braucht man zum Überdecken eines A0 Blattes?

### **Termumformungen und Lösen von Gleichungen**

Das obige Beispiel des Papierformates nutzten wir, um das stets gleiche Seitenverhältnis bei A0, A1, ... zu bestimmen. Es seien  $a$  und  $b$  die längere bzw. kürzere Seite des A0-Rechtecks. Dann sind  $b$  und  $a/2$  die längere bzw. kürzere Seite des Rechtecks A1. Da die Seitenverhältnisse gleich sind folgt:

$$a : b = b : (a/2).$$

Dies formen wir nun um, um das Verhältnis  $\frac{a}{b}$  explizit zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b}{\frac{a}{2}} \quad | \cdot b \\ \frac{a}{b} b &= \frac{b}{\frac{a}{2}} b \\ a &= \frac{b \cdot b}{\frac{a}{2}} \quad | \cdot \frac{a}{2} \\ a \cdot \frac{a}{2} &= b^2 \\ \frac{a^2}{2} &= b^2 \quad | \cdot 2: b^2 \\ \frac{a^2}{b^2} &= 2 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\ \frac{a}{b} &= \sqrt{2} \approx 1,4142. \end{aligned}$$

Tatsächlich ergeben die Messungen der Seitenlängen eines A4 Blattes 21,0 cm bzw 29,7 cm, was ungefähr dem Verhältnis  $\sqrt{2}$  entspricht.

## Euklidischer Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus bestimmt zu zwei gegebenen natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  deren größten gemeinsamen Teiler,  $\text{ggT}(a, b)$ . Wenn  $a > b$ , dann folgt mit Serie1, Aufgabe 3 (Aus  $d | a$  und  $d | b$  folgt  $d | (a - b)$ ), dass

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b).$$

Das wesentliche der obigen Gleichung ist, dass die größere der beiden Zahlen, nämlich  $a$ , auf der rechten Seite nicht mehr auftritt und durch die kleinere Zahl  $a - b$  ersetzt wurde. Diese Subtraktion von  $b$  kann man nun so lange fortführen bis man  $b$  nicht mehr abziehen kann:

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b) = \text{ggT}(a - 2b, b) = \dots = \text{ggT}(a - qb, b) = \text{ggT}(r, b), \quad a - qb = r < b$$

Nun kann man genauso verfahren und  $r$  so lange von  $b$  abziehen bis es nicht weiter geht und  $b - q_1 r < r$ . Diese Verfahren bricht irgendwann ab mit zwei Zahlen  $(0, d)$ . Dann ist  $d = \text{ggT}(a, b)$ . Anstelle der fortgesetzten Subtraktion der jeweils kleineren Zahl, kann man auch gleich eine Division mit Rest durchführen. Dieses Verfahren ist im „Arbeitsmaterial“, Abschnitt 3.1 erläutert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{ggT}(525601, 190111) &= \text{ggT}(525601 - 190111, 190111) \\ &= \text{ggT}(335490, 190111) = \text{ggT}(335490 - 190111, 190111) = \text{ggT}(145379, 190111) = \\ &= \text{ggT}(145379, 190111 - 145379) = \text{ggT}(145379, 44732) = \text{ggT}(145379 - 44732, 44732) \\ &= \text{ggT}(100647, 44732) = \text{ggT}(100647 - 2 \cdot 44732, 44732) = \text{ggT}(11183, 44732) \\ &= \text{ggT}(11183, 0) = 11183. \end{aligned}$$

## Zahlenkongruenzen — Modularechnung

Welche Reste treten bei Division durch 3 auf, natürlich 0, 1 und 2. Alle ganzen Zahlen, die denselben Rest lassen fassen wir zu einer *Restklasse* zusammen:

$$\begin{aligned}[0]_3 &= \{0, 3, 6, 9, -3, -6, -9, -12, \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ [1]_3 &= \{1, 4, 7, 10, 13, -2, -5, -8, \dots\} = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ [2]_3 &= \{2, 5, 8, 11, -1, -4, -7, \dots\} = \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Zahlen, die in derselben Klasse liegen heißen *zueinander kongruent modulo 3*. Wir schreiben

$$0 \equiv 3 \pmod{3}, \quad 7 \equiv -8 \pmod{3}, \quad 5 \equiv -7 \pmod{3}.$$

Bei der Division durch 2 gibt es nur zwei Restklassen, 0 und 1. Die Restklasse  $[0]_2$  der durch 2 teilbaren Zahlen ist die Menge der geraden Zahlen und die Restklasse  $[1]_2$  ist die Menge der ungeraden Zahlen.

Nun kann man an Stelle von 2 oder 3 einen beliebigen *Modul*  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  betrachten. Das führt zu folgender allgemeinen Definition:

**Definition 1** Zwei ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  heißen *kongruent modulo  $m$* , wenn eine der folgenden vier zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1.  $a$  und  $b$  lassen bei Division durch  $m$  denselben Rest.
2.  $m \mid (a - b)$ ,  $m$  teilt die Differenz der beiden Zahlen.
3.  $\frac{a-b}{m} \in \mathbb{Z}$ . Der Quotient ist eine ganze Zahl.
4.  $\exists q \in \mathbb{Z}: a = qm + b$ .

Wir schreiben  $a \equiv b \pmod{m}$  und sprechen „ $a$  ist kongruent  $b$  modulo  $m$ “.

Spezialfall:  $b = 0$ .  $a \equiv 0 \pmod{m}$  bedeutet nach Bedingung 2.  $m \mid a$ .

Beispiele:

$$\begin{aligned}12345 &\equiv 54321 \pmod{3}, & 91 &\equiv 35 \pmod{7}, & 123456 &\equiv 6 \pmod{10}, & 123456 &\equiv 56 \pmod{100}, \\ 2010 &\equiv -3 \pmod{11}, & 2011 &\equiv 1 \pmod{3}.\end{aligned}$$

Spezialfälle:  $m = 10$  und  $m = 100$ . Zwei (natürliche) Dezimalzahlen sind kongruent modulo 10, wenn sie auf dieselbe Ziffer enden. Zwei Dezimalzahlen sind kongruent modulo 100, wenn ihre letzten beiden Ziffern übereinstimmen.

## Eigenschaften der Kongruenzen

Reflexivität, Symmetrie und Transitivität: Für alle ganzen Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\begin{aligned}a &\equiv a \pmod{m}, \\a &\equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}, \\a &\equiv b \pmod{m}, \quad b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}.\end{aligned}$$

## Rechnen mit Kongruenzen

Kongruenzen können wie Gleichungen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden. Genauer, wenn  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $c \equiv d \pmod{m}$ , dann gilt auch

$$\begin{aligned}a + c &\equiv b + d \pmod{m} \\a - c &\equiv b - d \pmod{m} \\ac &\equiv bd \pmod{m} \\a^n &\equiv b^n \pmod{m}\end{aligned}$$

Hierbei ist  $n$  eine beliebige natürliche Zahl.

Anwendung: Herleitung der Neunerregel. Aus  $10 \equiv 1 \pmod{9}$  folgt nach Potenzieren  $10^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{9}$  und weiter  $10^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{9}$ . Sind  $a, b, c$  Ziffern, so hat man nach Multiplikation  $a 10^2 \equiv a \pmod{9}$ ,  $b 10^1 \equiv b \pmod{9}$  und  $c 10^0 \equiv c \pmod{9}$ . Addiert man diese drei Kongruenzen, so hat man

$$a 10^2 + b 10^1 + c 10^0 \equiv a + b + c \pmod{9}$$

Links steht die dreistellige Zahl  $abc$  in Dezimaldarstellung und rechts deren Quersumme  $Q(abc) = a + b + c$ . Das gilt für beliebige natürliche Zahlen:

Neunerregel: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $n \equiv Q(n) \pmod{9}$ .

Berechne!

- 1)  $123 \cdot 456 \cdot 789 \pmod{9}$ .
- 2)  $2^{100} \pmod{7}$ . Hinweis: Bestimme zunächst die Reste von  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$  und versuche eine Regelmäßigkeit festzustellen.
- 3)  $44^{44} \cdot 55^{55} \cdot 66^{66} \pmod{10}$
- 4)  $87^{432} + 45^{17} \pmod{11}$