Aufgabe 1. Los geht's

Carina, Felix, Martin und Verena haben sich für einen Mathezirkel angemeldet. Heute haben sie ihre erste Aufgabenserie zugeschickt bekommen und sich sofort an die Bearbeitung gemacht. Keines der Kinder hat sich zuerst an die Aufgabe „Los geht's" gemacht. Welches Kind (Vor- und Nachname) hat dabei mit welcher Aufgabe angefangen?

(1) Martin konnte es nicht abwarten, sich mit „Uhrithmetik" zu beschäftigen.
(2) Das Kind mit dem Nachnamen Schmidt hat sich zuerst „Würfelwürfel" angesehen.
(3) Die Aufgabe, mit der Felix angefangen hat, hat eine kleinere Nummer als die Aufgabe, mit der das Kind mit dem Namen Berger angefangen hat.
(4) Die Nachnamen von Verena und Martin beginnen mit dem gleichen Buchstaben.
(5) Das Kind mit dem Namen Müller hat nicht mit „Dreizehn" angefangen.
(6) Ein Kind hat den Nachnamen Meier.

Hinweise. Bei Aufgaben von diesem Stil kannst du immer annehmen, dass jede Möglichkeit genau einmal auftritt. In diesem Fall gibt es also jeweils genau ein Kind, das den Nachnamen Berger, Meier, Müller bzw. Schmidt hat, und jedes Kind hat mit einer anderen Aufgabe von 2 bis 5 angefangen. Versuche, eine übersichtliche Möglichkeit zu finden, deine Informationen und logischen Schlüsse aufzuschreiben, und gib diese als Lösung ab.

Aufgabe 2. Dreizehn

Wir suchen eine Zahl mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Quersumme der Zahl ist 13.
(2) Die Zahl ist durch 13 teilbar.
(3) Jede Ziffer der Zahl ist echt größer als die vorherige (also sind 13 und 156 erlaubt, aber 11 und 143 nicht).

Hinweise. Die *Quersumme* einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern, z.B. ist die Quersumme von 13 die Zahl $1 + 3 = 4$ und die Quersumme von 156 ist $1 + 5 + 6 = 12$. Eine Zahl ist durch eine andere *teilbar*, wenn bei der Division kein Rest bleibt, z.B. ist 25 nicht durch 12 teilbar, denn es bleibt der Rest 1, aber 156 ist durch 12 teilbar. (156 wäre also eine Lösung des Problems, wenn überall 12 statt 13 stünde.)

(a) Begründe, dass es keine zweistellige Lösung für das Problem gibt.
(b) Es gibt ein kurzes Argument, das zeigt, dass keine Lösungen mit fünf oder mehr Stellen existieren – finde es!
(c) Es gibt auch keine vierstelligen Lösungen. Warum?
(d) Finde alle dreistelligen Lösungen. (Hier musst du etwas mehr rechnen.)

Aufgabe 3. Würfelwürfel

Wie du vielleicht schon weißt, addieren sich auf einem handelsüblichen Würfel gegenüberliegende Seiten immer zu sieben. Angenommen, du hast setzt acht *gleiche* kleine Würfel zu einem großen Würfel zusammen.

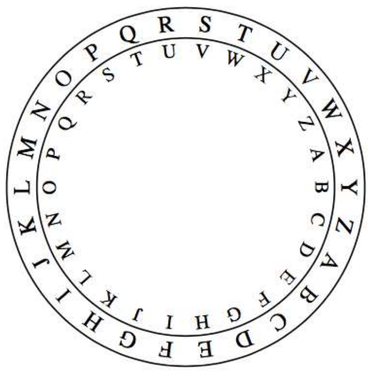
Die Würfel sollen zunächst so zusammengesetzt werden, dass von den kleinen Würfeln nur gerade Zahlen sichtbar sind.

(a) Ist das möglich?
(b) Kannst du es dabei zusätzlich erreichen, dass alle Paare gegenüberliegender Seiten wieder dieselbe Summe haben? Welche Summe ist das?

Nun sollen die Würfel stattdessen so zusammengesetzt werden, dass sich zwei gegenüberliegende Seiten des großen Würfels zu zehn addieren. Versuche zusätzlich zu erreichen, dass auf anderen Seiten des großen Würfels die Summe möglichst groß wird, und zwar

(c) auf einer der anderen Seiten,
(d) auf zwei gegenüberliegenden der anderen Seiten und schließlich
(e) auf zwei benachbarten der anderen Seiten.

Aufgabe 4. Jfaitjgwtah fa kfj Dwpyuzczhfj



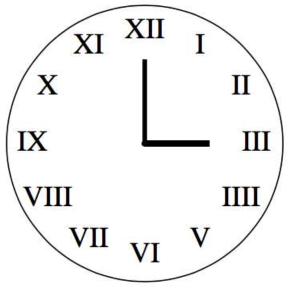
Khucolfkhq Joxhfnzxqvfk, gx kdvw ghq huvwhq Vfkulww cxu Orhvxqj glhvhu Dxijdeh jhvfkdiiw! Ghu Whaw, ghq gx gdehl hukdowhq kdvw xqg mhwcw olhvw khlvvw Noduwhaw. Ghu yhuvfkoxhvvhowh Whaw khlvvw Jhkhlpwhaw. Dov Orhvxqj ixhu glhvhq Devdwc ehdqwzruwh glh irojhqghq guhl Iudjhq: Zhofkhu Exfkvwdeh nrppw lp Ghxwvfkhq dp kdhxiljvwhq yru? Zhofkhu Exfkvwdeh wdxfkw lp Jhkhlpwhaw glhvhv Devdwchv dp kdhxiljvwhq dxi? Zhofkhu Exfkvwdeh wdxfkw lp Jhkhlpwhaw ghv qdhfkvwhq Devdwchv dp kdhxiljvwhq dxi?

Frue thg rexnaag, qnff qre mjrvgr Nofngm rvar naqrer Irefpuvrohat ahgmg. Qvrfrf Iresnuera urvffg hroevtraf Pnrfne-Irefpuyhrffryhat. Hz zve mh orjrvfra, qnff qve qvr Ragfpuyhrffyhat tryhatra vfg, ornagjbegr aha qvr Sentra: Jrypure Ohpufgnor vfg vz Qrhgfpura nz mjrvgunrhsvtfgra haq jnf vfg qre Nofgnaq qvrfre Ohpufgnora vz Nycunorg? Jrypur orvqra Ohpufgnora fvaq vz anrpufgra Nofngm nz unrhsvtfgra haq jrypura Nofgnaq unora qvrfr orvqra Ohpufgnora vz Nycunorg?

Xbs rhcfbwq, gp ibrq fbwf njcsf Xfbrqfszsluqvyvdbw vgfs fbw njcsfs Xfbrqfszsluqvyvdf. Wvqbfsf jyr Yvfrpwd epfs gbfrfw Jirjqk gfbwfw Wjxfw jyr Dfcfbxqfmq. Zjwwrq gp jprrfsgfx jwdfifw, nbf gfs Wjxf gbfrfs Jpedjif bx Zyjsqfmq jprrbfcq?

Aufgabe 5. Uhrithmetik

Mit den Zahlen auf einer Uhr kann man rechnen. Um Verwirrung zu vermeiden, schreibe ich diese Zahlen römisch wie rechts im Bild zu sehen.



(Wenn du römische Zahlen schon kennst, wunderst du dich vielleicht über die Schreibweise der Zahl 4 als IIII statt IV. Das ist auf Uhren so üblich. Wenn du römische Zahlen noch nicht kennst: Jeder Buchstabe hat einen Wert: I ist 1, V ist 5 und X ist 10. Der Wert einer Zahl ist die Summe der Buchstaben: $\mathrm{VII} = 5 + 1 + 1 = 7$; aber wenn I *vor* V oder X steht wird stattdessen 1 abgezogen: $\mathrm{XI} = 10 - 1 = 9$.)

Die Addition funktioniert so, wie du es von Uhrzeiten kennst, also z.B. $\mathrm{I} + \mathrm{II} = \mathrm{III}$, $\mathrm{VI} + \mathrm{III} = \mathrm{IX}$ und $\mathrm{IX} + \mathrm{V} = \mathrm{II}$, denn nach XII kommt wieder I.

(a) Berechne $\mathrm{II} + \mathrm{VII}$, $\mathrm{IX} + \mathrm{VI}$, $\mathrm{XII} + \mathrm{I}$ und $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IIII} + \mathrm{V} + \mathrm{VI} + \mathrm{VII} + \mathrm{VIII} + \mathrm{IX} + \mathrm{X} + \mathrm{XI} + \mathrm{XII}$.

(b) Es gibt eine Uhrzeit, die sich wie Zahl 0 verhält: Wenn man sie zu einer anderen Zeit addiert, ändert sich diese andere Zeit nicht. Welche ist das?

(c) Schließlich gehört zu einer Addition auch eine Subtraktion: Was ist $\mathrm{IIII} - \mathrm{II}$, $\mathrm{XI} - \mathrm{II}$ und $\mathrm{VI} - \mathrm{XI}$? Jede dieser Rechnungen ist möglich, obwohl es keine negativen Uhrzeiten gibt.

Man kann auch multiplizieren. Dazu addiert man einfach die erste Zahl so oft zu sich selbst, wie es die zweite angibt. Z.B. $\mathrm{II} \times \mathrm{III} = \mathrm{II} + \mathrm{II} + \mathrm{II} = \mathrm{VI}$ und $\mathrm{IX} \times \mathrm{II} = \mathrm{IX} + \mathrm{IX} = \mathrm{VI}$.

(d) Berechne $\mathrm{III} \times \mathrm{IIII}$, $\mathrm{VI} \times \mathrm{VII}$ und $\mathrm{IX} \times \mathrm{V} \times \mathrm{XII}$.

(e) Überzeuge dich, dass das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten, indem du jeweils zwei Beispiele berechnest.

(f) Was passiert, wenn man mit XII multipliziert? Überrascht dich das?

Wenn eine Division a/b ohne Rest aufgeht, beantwortet sie die Frage: Was muss man für x einsetzen, damit $b \times x = a$ gilt? So soll die Division hier auch definiert sein.

(g) Was ist III/I, X/V, VI/V, $\mathrm{III}/\mathrm{VII}$? Du solltest in jedem dieser Fälle wieder eine der zwölf Uhrzeiten als Ergebnis bekommen. Du kannst prüfen, ob dein Ergebnis stimmt, indem du die Proberechnung machst.

(h) Die Division ist aber etwas merkwürdig: Was passiert, wenn du versuchst, I/XII, $\mathrm{III}/\mathrm{VIII}$, $\mathrm{IIII}/\mathrm{VIII}$ zu berechnen?