Korrespondenzzirkel Mathematik Klasse 6, 2017/2018
Lösungen der 3.Serie

Aufgabe 1 (Kastanien, 6 Punkte): Es sind 90 Kastanien im Beutel. Diese Aufgabe haben fast alle richtig gelöst. Aber viele haben zu knappe oder gar keine Begründungen abgegeben. Es sei n die Anzahl der Kastanien im Beutel. Julian vermutet, dass mehr als

$$7 \cdot 12 + 6 = 84 + 6 = 90$$

Kastanien im Beutel sind, also $n > 90$. Anna schätzt, dass weniger als $9 \cdot 10 = 90$ Kastanien im Beutel sind. Also $n < 90$. Wenn beide Aussagen falsch sind, kann nur noch $n = 90$ gelten.

Aufgabe 2 (Orakel, 6 Punkte): Lösung: rechts: Gott der Wahrheit, Mitte: Gott der Lüge, links: Gott der Diplomatie. Hier gab es viele verschiedene richtige Lösungsansätze. Die Aussagen waren

Links: Neben mir steht der Gott der Wahrheit. (1)
Mitte: Ich bin der Gott der Diplomatie. (2)
Rechts: Neben mir steht der Gott der Lüge. (3)

Da es nur *einen* Gott der Wahrheit gibt, kann er wegen (1) nicht ganz links stehen. Der Gott der Wahrheit kann aber auch nicht in der Mitte stehen, weil er das dann auch in (2) sagen müsste. Also steht der Gott der Wahrheit ganz rechts und neben ihm in der Mitte also der Gott der Lüge, wegen (3). Somit bleibt für den linken Platz nur noch der Gott der Diplomatie. Tatsächlich stellt man dann fest, dass alle drei Aussagen den erwarteten Wahrheitsgehalt haben: Die Götter der Diplomatie und der Lüge lügen, der Gott der Wahrheit sagt die Wahrheit.

Aufgabe 3 (Quader, 8 Punkte): Die Seitenlängen des Quaders seien mit a, b und c bezeichnet, wobei ich die Einheit cm bei Längen-, cm^2 bzw. cm^3 bei Flächen- bzw. Volumenangaben weglasse. Wir benutzen die Formel für die Oberfläche A und für das Volumen V eines Quaders. Die Formel für die Oberfläche kann man sich leicht überlegen: Der Quader hat 6 Seitenflächen, alles Rechtecke, von denen gegenüberliegende gleich groß sind.

$$A = 2(ab + bc + ca), \qquad V = abc. \tag{1}$$

Gegeben waren $A = 286$ und

$$ab = 63, \qquad bc = 35. \tag{2}$$

Die Bezeichnung der Kanten kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf diese Art einrichten. Setzt man dies in (1) ein, so hat man

$$286 = 2(63 + 35 + ca) = 196 + 2ca$$

und somit $2ca = 90$ bzw.

$$ca = 45. \tag{3}$$

Viele haben die richtige Lösung nun durch Probieren und Raten gefunden. Es gibt aber auch mehrere Rechenwege, die zum Ziel führen.
1.Weg: Wir multiplizieren die obigen Gleichungen (2) und (3) miteinander und ziehen dann die Quadratwurzel:

$$\begin{aligned} ab\cdot bc\cdot ca &= 63\cdot 35\cdot 45 \\ a^2b^2c^2 &= 9\cdot 7\cdot 5\cdot 7\cdot 5\cdot 9 \\ V = abc &= 9\cdot 5\cdot 7 = 315. \end{aligned}$$

Das Volumen des Quader beträgt $315\,\text{cm}^3$.

2.Weg Wir stellen die Gleichungen (2) nach a bzw. nach c um und setzen die Ergebnisse $a = \frac{63}{b}$, $c = \frac{35}{b}$ in (3) ein: $\frac{35}{b}\cdot\frac{63}{b} = \frac{35\cdot 63}{b^2} = 45$. Multipliziert man die letzte Gleichung mit b^2 und dividiert durch 45 und zieht dann die Wurzel, so hat man $b^2 = 7^2$ bzw. $b = 7$. Setzt man dies in (2) ein, so erhält man $a = 9$ und $c = 5$. Das Volumen des Quaders beträgt also $V = 9\cdot 5\cdot 7\,\text{cm}^3 = 315\,\text{cm}^3$.

Aufgabe 4 (Würfeln, 8 Punkte): Ein Denkfehler bestand darin, dass die Zahl der möglichen Würfe mit 21 und nicht mit 36 angegeben wurde. Das Ergebnis $\{1,2\}$ taucht aber in der Regel doppelt so häufig auf, wie das Ergebnis $\{1,1\}$, da ja zwei mögliche Paare $(1,2)$ und $(2,1)$ dem einzelnen Paar $(1,1)$ gegenüberstehen.
Da jeder Würfel 6 verschiedene Augenzahlen anzeigen kann und beide Würfel unabhängig voneinander fallen, gibt es also $6\cdot 6 = 36$ mögliche Ergebnisse des Würfelns. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei 1 die Glückszahl.
a) Bei den 10 Ereignissen $(1,2), (1,3), \cdots, (1,6)$ und $(2,1), \cdots, (6,1)$ muss der Würfelbudenbesitzer jeweils 2 € bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit für genau einmaliges Erscheinen der Glückszahl ist also $10/36$. Nur bei einem einzigen Ereignis von den 36 erscheint die Glückszahl doppelt. Die Wahrscheinlichkeit ist hier $1/36$. Beim Ereignis $(1,1)$ muss er 5€ bezahlen. Da alle 36 Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, erwartet der Budenbesitzer in 36 Spielen einen Einsatz von 36€ und Ausgaben von (in €) $10\cdot 2 + 1\cdot 5 = 25$, also 25€. Bei 36 Spielen erwartet er also einen Gewinn von $36 - 25 = 11$, also 11€.
b) Mit der in a) ermittelten Quote kann sich der Würfelbudenbesitzer bei 1000 Spielen auf einen Gewinn von

$$1000\cdot\frac{11}{36} \approx 305,55$$

Euro einstellen. Mit anderen Worten, von den 1000 € muss er etwa 694,44 € wieder abgeben.