

LSGM - Korrespondenzzirkel

2014/2015 - Klasse 8

Serie 5

Aufgabe 1 (2+2+2)

Zeige folgende Behauptungen für alle natürlichen Zahlen n :

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

b) $3 \mid n^4 - 4n^2$

c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

Aufgabe 2 (1+2+3)

Die 16 Bundesländer von Deutschland nehmen bei der Mathematikolympiade in der (inoffiziellen) Länderwertung eine eindeutige Rangfolge von 1 bis 16 ein.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Platzierung von Sachsen, Sachsen-Anhalt, Thüringen, Brandenburg, Berlin und Mecklenburg-Vorpommern?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es bei a), wenn Sachsen die Wertung der Mathematikolympiade gewinnt und Thüringen vor Brandenburg liegt?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass Sachsen, Hessen und Thüringen in der Tabelle alle Nachbarn sind?

Aufgabe 3 (4)

Beweise, dass von den durch 7 teilbaren ganzen Zahlen im Bereich $1000 \leq x \leq 1100$ nicht 9 voneinander verschiedene Zahlen ausgewählt werden können, die alle gerade sind.

Aufgabe 4 (3+1)

- Zeige, dass für alle reellen Zahlen a, b, c gilt: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.
- Wann gilt Gleichheit?