Korrespondenzzirkel der LSGM 2014/15

Klasse 7, Serie 7

Aufgabe 1 Ermittle jeweils die Lösungsmenge im Bereich der rationalen Zahlen ($x \in \mathbb{Q}$) der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

a) $3+\sqrt{x+1}<0$; b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=0$;

c) $\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}=\dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+3)}{6}$; d) $(5+x)(4x-2)<(2x+1)(2x-1)$.

Hinweis. Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 4.2 (Regeln für das äquivalente Umformen) sowie in „Regeln“ auf Seite 15 die Regeln (3.2) und (2.1).

Aufgabe 2 Beweise ohne Verwendung elektronischer Hilfsmittel, dass $z = 11^{10}-1$ durch 600 teilbar ist.

Hinweis. Lies dazu in „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.2 (Teilbarkeitsregeln) und 3.3 (Das Rechnen mit Kongruenzen). Verwende den Satz über die Teilbarkeit eines Produkts sowie das Rechnen mit Kongruenzen.

Aufgabe 3 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} < \overline{AC}$ und $\angle BAC = \alpha$. Es sei D derjenige Punkt auf $\overline{AC}$, für den $\overline{CD} = \overline{AB}$ gilt; es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AD}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Ferner sei E der Schnittpunkt der Geraden MN und AB.

Beweise, dass dann gilt: $\angle AEM = \frac{\alpha}{2}$.

Hinweis. Als Hilfspunkt eignet sich der Punkt F auf der Verlängerung von $\overline{CA}$ über A hinaus, für den $\overline{AF} = \overline{AB}$ gilt. Lies dazu in „Sätze“ die Abschnitte IVa und IVb über Dreiecke.

Aufgabe 4 Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A:	(1)	x ist eine zweistellige Zahl.
	(2)	x ist kleiner als 1000.
Paar B:	(1)	Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
	(2)	Die Quersumme von x ist 11.
Paar C:	(1)	x besitzt drie Ziffern, die einander gleich sind.
	(2)	x ist durch 37 teilbar.
Paar D	(1)	Die Quersumme von x ist gleich 27.
	(2)	Das Produkt der drei Ziffern von x ist 0.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C und D eine Aussage wahr und die andere Aussage falsch ist. Gibt es solche Zahlen, dann ermittle alle diese Zahlen.

Aufgabe 5 Zwei Kerzen von unterschiedlicher Dicke wurden zu Beginn eines Tages um 0 Uhr angezündet; damals hatten sie verschiedene Längen. Am selben Tag um 2 Uhr wurde beobachtet, dass sie gleiche Länge hatten. An demselben Tag um 3:30 Uhr war die ursprünglich längere Kerze vollständig niedergebrannt und um 5 Uhr auch die ursprünglich kürzere Kerze.
In welchem Verhältnis stand zu Anfang die Länge der kürzeren Kerze zur Länge der längeren Kerze?

Einsendeschluss: 12. Juni 2015
Dr. A. Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig