Korrespondenz-Seminar der LSGM 2014/15

Klasse 7, Serie 4

Aufgabe 1 Zu konstruieren sind alle Vierecke $ABCD$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $\overline{AB} = a = 8\,\text{cm}$

(b) $\overline{CD} = c = 3\,\text{cm}$

(c) $\overline{AC} = e = 7\,\text{cm}$

(d) $\overline{BD} = f = 6\,\text{cm}$

(e) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

a) Gib eine Konstruktionsbeschreibung an und konstruiere ein derartiges Trapez.
b) Beweise: Wenn ein Viereck, wie von dir beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (a) bis (e) (Existenznachweis).
c) Beweise: Wenn ein Viereck die Bedingungen (a) bis (e) erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren (Einzigkeitsnachweis).

Hinweis. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 2.1 (Konstruktionsaufgaben) sowie in „Regeln“ auf Seite 10 die Regeln (2.1) und (2.2). Man kann auf der Geraden AB einen Hilfspunkt E so wählen, dass ein konstruierbares Hilfsdreieck AEC und ein nützliches Hilfsviereck $BECD$ entstehen.

Aufgabe 2 a) Welche der folgenden Kongruenzen sind wahr und welche sind falsch? Vereinfache die wahren Kongruenzen durch Division auf beiden Seiten so weit wie möglich:

$$666 \equiv 414 \pmod{63}; \quad 401276 \equiv 25362 \pmod{99}; \quad 9945 \equiv 4590 \pmod{357}.$$

b) Auf welche Ziffer endet das Produkt

$$z = 123456^{789} \cdot 1999^{1999} \cdot 3553^{35}?$$

Hinweis. Lies dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.3 (Das Rechnen mit Kongruenzen) und wiederhole im Abschnitt 3.1 den Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 3 Über die Punkte A, B, C, D, E, F, G und S einer Ebene wird vorausgesetzt:

V_1: ABC ist ein Dreieck mit rechtem Winkel bei A.
V_2: Über der Seite $\overline{BC}$ ist ein Quadrat $CBDE$ mit dem Diagonalenschnittpunkt S so gezeichnet, dass das Dreieck ABc nicht überdeckt wird.
V_3: Das Lot von S auf die Gerade AB hat den Fußpunkt F, und das Lot von S auf die Gerade AC hat den Fußpunkt G.

Beweise, dass dann $AFSG$ ein Quadrat ist.

Hinweis. Informiere dich in „Beweismittel“ auf Seite 1 über Sätze, mit deren Hilfe man Aussagen der Gestalt $\alpha = \beta$ herleiten kann.

Aufgabe 4 Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15×15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrats sei d genannt. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind

(a) Jede waagerechte Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.
(b) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen gilt: die Zahlen in diesen Feldern sind gleich.

Für jede derartige Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den 15 von d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, dass diese Summe durch die Bedingungen (a) und (b) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe.

Aufgabe 5 Drei Pumpen A, B und C arbeiten mit unterschiedlicher Leistung. Bei gleichzeitigem Einsatz füllen sie ein Wasserbecken W in genau einer Stunde.
Eines Morgens werden die drei Pumpen um 8:00 Uhr in Betrieb gesetzt; um 8:30 Uhr wird Pumpe A abgeschaltet. Es dauert nun bis 9:20 Uhr, bis die Pumpen B und C gemeinsam das Becken W vollständig gefüllt haben.

Am folgenden Tag soll das Becken W nur durch Pumpe A gefüllt werden. Wie lange dauert das?

Einsendeschluss: 7. Februar 2015
Dr. A. Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig