

Korrespondenz-Seminar der LSGM 2012/13

Klasse 7, Serie 7

Aufgabe 1 Beweise die folgenden Sätze über reelle Zahlen x, y :

a) Wenn $x, y > 0$, dann gilt $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$.

b) Wenn $x, y > 0$, dann gilt $x(x + 1) + \frac{y^2}{x} \geq x^2 + 2y$.

Hinweis. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 4.3 (Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen) sowie in „Regeln“ (1), (2.2.1) und (2.2).

Aufgabe 2 Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen a, b und c :

a) Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, dann $b \mid c$.

b) Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, dann $a^2 \mid bc$.

c) Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$, dann $ab \mid c$.

Hinweis. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.2 (Teilbarkeitslehre) und in „Regeln“ (1), (2.1) und (2.2).

Aufgabe 3 Es sei n eine natürliche Zahl und es sei $z = 46^{2n} - 12^{2n}$.

Beweise, dass dann stets gilt $1972 \mid z$.

Hinweis. Rückwärtsarbeiten! Die Zahl 1972 lässt sich als Produkt aus drei Primzahlpotenzen zerlegen. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.3 (Rechnen mit Kongruenzen).

Aufgabe 4 Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen über dem Bereich der rationalen Zahlen.

a)

$$\frac{3-x}{66} - \frac{3x+1}{154} = \frac{2-x}{42} - \frac{3x-1}{231}.$$

b)

$$\frac{3x-7}{4x-6} - \frac{3}{5} = \frac{1}{3} - \frac{x+6}{10x-15}.$$

Hinweis. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt (Regeln für das äquivalente Umformen).

Aufgabe 5 Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B . Nach einer Fahrzeit von 20 min hatte er eine Panne, die in 30 min behoben werden konnte. Nach weiteren 12 min Fahrzeit musste er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 min warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt. Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11:06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen stellte der Kraftfahrer fest, dass er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte der Zeit benötigt hatte, die insgesamt von der Abfahrt in A bis zur Ankunft in B vergangen war. Es sei angenommen, dass der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

- a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
- b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h?
- c) Wie viele Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

Letzter Einsendetermin: 31. Mai 2013

Dr. A. Schüler
Hauptmannstraße 3
04109 Leipzig

Tel. 01522-8654371 (mobil)

E-Mail: schueler@math.uni-leipzig.de