Korrespondenzzirkel Klasse 6 – 7. Serie

Liebe Schüler,

nachdem wir uns in letzter Zeit mit der Gauß'schen Summenregel und dem Induktionsbeweis beschäftigt haben, stelle ich euch heute ein neues Thema vor, das uns für den Rest des Schuljahres begleiten wird: Invarianz. Zusätzlich gibt es eine wiederholende Aufgabe zum Thema Graphentheorie. Bitte geht die folgenden Ausführungen in Ruhe durch und kontaktiert mich, wenn ihr etwas nicht versteht.

Meine E-Mail-Adresse (maria.fuchs@maju.l.shuttle.de) solltet ihr ja alle haben. Sendet mir die Lösungen bis zum 05.07. wie immer an die

Luppenstraße 6, 04177 Leipzig

Damit ich euch die Lösungen noch dieses Schuljahr zurücksenden kann. Das zweite Zirkeltreffen in diesem Halbjahr wird Ende Juni stattfinden, ich werde den Termin bald auf der Website in unserem Zirkelordner bekannt geben. Bei diesem Treffen nehmen wir die beiden Themen noch mal genau unter die Lupe.

Invarianz

Eine Aufgabe, bei der man den mathematischen Lösungsansatz der Invarianz anwenden kann lautet:

Wir haben 6 Münzen, 3 davon zeigen Kopf, 3 Zahl. Bei einem Zug darf man zwei beliebige Münzen nehmen und umdrehen. Ist es möglich nach einer Anzahl von Zügen die Münzen so umzudrehen, dass alle Kopf zeigen?

Wie löst man diese Aufgabe? Ausprobieren (bitte wirklich mal versuchen) führt zu dem Resultat, dass immer mindestens eine Münze Zahl zeigt. Das ist allerdings keine gültige Lösung der Aufgabe, denn schließlich könnte man weiter probieren, vielleicht klappt es dann ja. Wir brauchen einen richtigen Beweis!

Beim Ausprobieren fällt allerdings auf, dass immer eine ungerade Anzahl von Münzen (1,3 oder 5) Zahl zeigt. Dies ist auch kein Zufall, denn ein Zug kann nur einer der drei folgenden Fälle sein:

- Dreht man zwei Münzen mit Kopf um, so steigt die Anzahl der Zahl zeigenden Münzen um 2.
- Dreht man einmal Kopf, einmal Zahl um, so bleibt die Zahl der Zahl zeigenden Münzen gleich.
- Dreht man zwei Münzen mit Zahl um, so sinkt die Anzahl der Zahl zeigenden Münzen um 2.

Zu Beginn ist die Anzahl der Zahl zeigenden Münzen 3. Da sich die Anzah um +2, 0 oder -2 ändert, bleibt sie weiterhin ungerade. Da die Anzahl 0 nicht ungerade ist, kann ich es nicht erreichen, dass keine Münze mehr Zahl zeigt, also alle Kopf zeigen.

Das Verfahren, das wir angewendet haben, heißt Beweis der Unmöglichkeit mittels einer Invariante:

! Eine **Invariante** ist eine Charakteristik (z. B. eine Zahl), die bestimmten Objekten zugeschrieben ist und sich bei bestimmten Transformationen von diesen Objekten nicht ändert. Angenommen, in einem Problem wird gefragt, ob man ein Objekt in ein anderes durch bestimmten Transformationen umwandeln kann. Wenn man eine Invariante dieser Transformationen finden kann, die auf dem Anfangsobjekt und auf dem Endobjekt verschiedene Werte hat, so kann man behaupten, dass die erwünschte Umwandlung unmöglich ist.

Bei unserer Beispielaufgabe ist ein Objekt eine Anordnung der Münzen, eine erlaubte Transformation ein Umdrehen von zwei beliebigen Münzen und eine Invariante ist die Parität (gerade oder ungerade) von Zahl zeigenden Münzen.

Aufgaben

1. Invarianz I

Auf 6 Bäumen sitzen 6 Spatzen, auf jedem Baum ein Spatz. Die Bäume stehen in einer Reihe mit Abstand von 10 Metern. Wenn ein Spatz von einem Baum auf einen anderen fliegt, muss einer von den anderen in die Gegenrichtung auf die gleiche Distanz fliegen. Können sich alle Spatzen auf einem Baum treffen?

2. Invarianz II

In einer 4x4 Tabelle ist die linke obere Zelle in schwarz gefärbt, alle übrigen Zellen sind weiß. Zeige, dass es unmöglich ist, durch Umfärbungen von Zeilen und Spalten die ganze Tabelle weiß zu machen.

3. Invarianz III

Die Insel Weißblaurot ist von 13 weißen, 15 blauen und 17 roten Chamäleons bewohnt. Wenn zwei Chamäleons von verschiedenen Farben aufeinander treffen, wechseln sie ihre Farben zur dritten (z. B. ein weißes und ein blaues werden beide rot). Können nach einiger Zeit alle Chamäleons gleichfarbig werden?

4. Graphentheorie (Wdh.)

Ein Reisender erzählt von seinem Besuch des Kontinents Atlantis. Er sagt, dort gäbe es 7 Staaten, so dass jeder Staat an 3 anderen grenzt. Kann man ihm trauen?

5. Graphentheorie (Wdh.)

In einem Dorf stehen 3 Häuser und 3 Brunnen. Kann man von jedem Haus zu jedem Brunnen einen Pfad anlegen, so dass keine zwei Pfade sich kreuzen?